

## 立方体表面上の数理パズルについて

秋田大学 工学資源学研究科 山村明弘 (Akihiro Yamamura)

秋田大学 工学資源学部 藤原美早紀 (Misaki Fujiwara)

Department of Computer Science and Engineering,  
Akita University

### 1 チェス盤上のパズル

縦横 8 マスのチェス盤上に 8 個の互いが攻撃しないクイーンの配置を見つけるパズルはエイトクイーンパズルと呼ばれ, バックトラックアルゴリズムの解析などで研究対象になっている. エイトクイーンパズルを, 一般の  $n$  に対して縦横  $n$  マスのチェス盤に拡張したパズルは  $n$ -クイーン問題と呼ばれ制約充足問題の典型例であり, プログラムの高速化の手法の研究対象やベンチマークとして取り上げられることも多い.  $n$ -クイーン問題については I. Rivin, I. Vardi, and P. Zimmerman[1] に詳しく紹介されている.

$n$ -クイーン問題はクラス #P に含まれないことが知られており [2], したがって解の個数を求めることは難しい. エイトクイーン問題については, 本質的に異なる解は全部で 12 個あることが知られている. N. J. A. Sloane の The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences(<http://oeis.org/>) に, 多くの組合せ構造に関連する数列がまとめられており,  $n = 26$  まで  $n$ -クイーン問題の解の個数が与えられている.

アルゴリズムの研究対象として 2 次元のチェス盤上の  $n$ -クイーン問題は種々の変形が提案されている. 例えば, Pólya[3] は  $n \times n$  の正方形の相対する辺を同一視して得られるトーラス上のチェス盤における  $n$ -クイーン問題 (トロイダル  $n$ -クイーン問題, モジュラー  $n$ -クイーン問題とも呼ばれる) について考察している. この場合は平面における  $n$ -クイーン問題よりも理論的な解析が可能となる. また, 3 次元以上の超立方体に拡張した  $n$ -クイーン問題も [4] などで考えられている. さらにクイーンの代わりに, 縦横に動くことが出来る駒であるルークを用いた  $n$ -ルーク問題も考察されている.

## 2 立方体上のパズル

著者の一人は平面上のゲームやパズルを立方体上に拡張すること試みている。例えば、数独パズルを立方体表面上に拡張することを考察している。これはラテン方阵や数独グリッドを立方体表面に展開した組み合わせデザインの構成法の研究に他ならない。これらの組み合わせデザインの存在性は立方体の1面におけるマス目の数に依存し、その存在性の必要十条件については[6]において完全に解析されている。本論文では、パズルを立方体上に拡張する試みの一例として[5]において得た $n$ -クイーン問題を立方体表面上に展開する試みに関する計算機実験結果について報告する。

立方体上のルークは、2次元チェス盤上のルークと同様に縦横に動く事ができる。図1にルークの動きの一例を示す(図においてRがルークを表す)。一方、2次元チェス盤上のクイーンの動きを立方体表面に拡張す

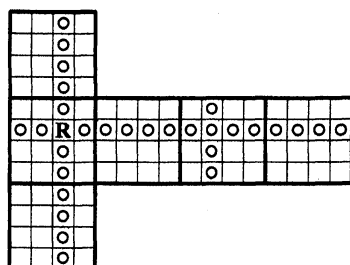


図 1: 立方体上でのルークの動き

る方法は複数考えられる。[5]では、立方体上におけるクイーンの縦横の動きはルークと同様とし、立方体上の面の対角線上にクイーンがある場合には、斜めの動きをクイーンが位置している面の上だけに限定して考えている。立方体上の面の対角線上にクイーンがない場合には、2のようにマス目の対角線をたどり、クイーンの存在するマス目と頂点を共有する隣接したマス目へ移動する動きをクイーンの斜め方向の動きとする。

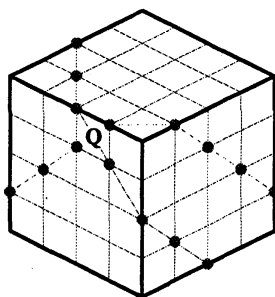


図 2: 立方体上でのクイーンの動き

立方体上の  $n$ -クイーン問題（または  $n$ -ルーク問題）の解とは、立方体上で互いに攻撃しない位置に最大個数のクイーン（またはルーク）を置く配置のことである。ここで、 $n$  は立方体の一辺の長さを指しており、置く駒の個数ではない。図 3, 4 に、一辺が 2 の立方体上のルーク問題の解とそれを展開図に記載したものを示す。

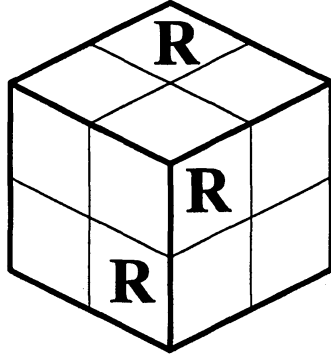


図 3: 2-ルーク問題の解

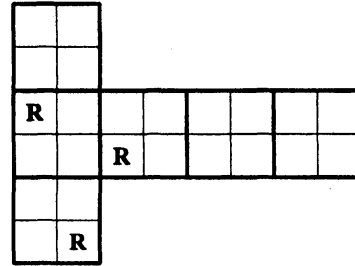


図 4: 2-ルーク問題の解の展開図

## 2.1 $n$ -ルーク問題の解の特性

平面チェス盤の  $n$ -ルーク問題の解においては  $n$  個のルークを置くことは明らかであるが、立方体上の  $n$ -ルーク問題の解がいくつのルークを持つのか自明ではない。[5] において、一辺が  $n$  の立方体上に置くことが出来る互いに攻撃しないルークの最大個数は  $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  であることを示している。よって、 $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  個のルークをおいて互いに攻撃しない位置に配置されていることを調べることでルーク問題の解であるかどうか判断できる。

## 3 正 8 面体群の作用

### 3.1 群の作用と Cauchy-Frobenius の定理

空間の中にある立方体に、それをそれ自身に重ね合わせる変換を施すと、 $n$ -クイーン問題や  $n$ -ルーク問題の解から新しい解を導出できるが、この変換によって互いに移り合う解は同じものと考えられる。立方体をそれ自身に重ね合わせる変換は正 8 面体群をなし、以下の 3 つのタイプに分類できる。正 8 面体群は 4 次の対称群  $S_4$  と同型であることに注意してほしい。

1. 相対する面の中心を結ぶ線を軸として、 $\frac{2\pi}{4}$  だけ回転する変換。

2. 相対する頂点を結ぶ線を軸として,  $\frac{2\pi}{3}$  だけ回転する変換.
3. 相対する辺の中点を結ぶ線を軸として,  $\pi$  だけ回転する変換.

同値類の個数を求めるには Cauchy-Frobenius の定理 (Burnside の定理とも呼ばれる) を利用する.

**補題 3.1 (Cauchy-Frobenius の定理)** 有限群  $G$  が有限集合  $S$  に作用しているとする. この時,  $G$  の作用により導かれる  $S$  の同値類の数は

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \quad (3.1)$$

で与えられる. ここで, 各  $g \in G$  に対して,  $\psi(g)$  は  $g$  により不変 (つまり  $gs = s$ ) となる  $S$  の元  $s$  の個数を表す.  $\square$

正 8 面体群の  $n$ -クイーン問題 (または  $n$ -ルーク問題) の解の集合上の作用において不変となる解の個数を調べることにより, Cauchy-Frobenius の定理から正 8 面体群の作用に関する同値類の個数を求めることが出来る. 以下の補題は簡単に示すことができる.

**補題 3.2** 群の元  $g_1$  と  $g_2$  が同じ共役類に含まれるならば,  $\psi(g_1) = \psi(g_2)$  である.

補題 3.2 から, Cauchy-Frobenius の定理を利用して同値類の数を計算するときには, 同じ共役類に含まれる群のすべての元について  $\psi$  の値を計算する必要はなく, 各共役類につき一つの元に対して  $\psi$  の値を計算すれば十分である.

次に, 正 8 面体群の作用について説明する. 立方体は 4 つの対角線を持っており (図 5, 6, 7, 8 を参照してほしい), 正 8 面体群の作用が 4 つの対角線の置換を引き起こす. ここで, 頂点 1-7, 2-8, 3-5, 4-6 を結んだ対角線をそれぞれ  $a, b, c, d$  と名付ける.

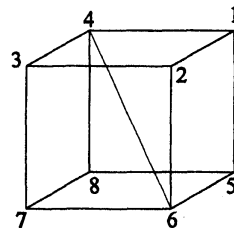
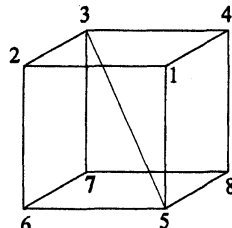
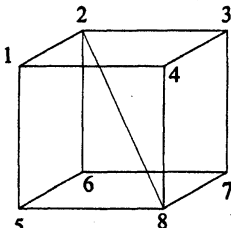
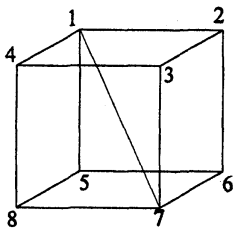


図 5: 対角線  $a$

図 6: 対角線  $b$

図 7: 対角線  $c$

図 8: 対角線  $d$

正 8 面体群の作用が引き起こす対角線の置換を考えることで、正 8 面体群が 4 次の対称群と同一視できる。例えば、タイプ 1 の置換である面 1-2-3-4 と面 5-6-7-8 の中心を結ぶ線を軸として  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転する操作は、対角線  $a, b, c, d$  をそれぞれ対角線  $b, c, d, a$  に移す。これは、置換  $(abcd)$  に対応する。タイプ 1 の置換である、面 1-2-3-4 と面 5-6-7-8 の中心を結ぶ線を軸として  $\pi$  だけ回転する操作は、対角線  $a, b, c, d$  をそれぞれ対角線  $c, d, a, b$  に移す。これは、置換  $(ac)(bd)$  に対応する。

タイプ 2 の置換である、対角線  $a$  を軸として、 $\frac{2\pi}{3}$  だけ回転する操作は、対角線  $a, b, c, d$  をそれぞれ対角線  $a, c, d, b$  に移す。これは、置換  $(bcd)$  に対応する。

タイプ 3 の置換である、辺 1-5 の中心と辺 3-7 の中心を結ぶ線を軸として、 $\pi$  だけ回転する操作は、対角線  $a, b, c, d$  をそれぞれ対角線  $c, b, a, d$  に移す。これは、置換  $(ac)$  に対応する。同様に正 8 面体群の全ての元は 4 つの対角線  $a, b, c, d$  の置換を引き起こし、実際に 4 次の対称群  $S_4$  と同型対応が付けられる。従って、正 8 面体群を 4 つの対角線に関する対称群  $S_4$  と同一視出来る。対称群の共役類は同じ巡回型を持つ元からなることが知られている。すると (4 次の対称群と同一視して) 正 8 面体群の共役類は 5 つあり、それぞれ代表元として  $e, (ab), (ab)(cd), (abc), (abcd)$  をとることができる。従って、補題 3.2 と (3.1) から  $n$ -クイーン問題 (または  $n$ -ルーク問題) の同値でない解の個数は以下となる。

$$\frac{1}{24}(\psi(e) + 6\psi((ab)) + 3\psi((ab)(cd)) + 8\psi((abc)) + 6\psi((abcd))) \quad (3.2)$$

### 3.2 計算上の工夫

計算機実験により解の個数を求める際に、不必要な計算を省くことにより計算量を削減するため以下の事実を利用する。これらの証明は [5] を参照してほしい。

1.  $n \geq 2$  ならば立方体上の  $n$ -ルーク問題 ( $n$ -クイーン問題) の解は、変換  $(ab)(cd)$  と  $(abcd)$  により不変ではない。
2.  $n = 2k + 1$  ( $k$  は自然数) ならば立方体上の  $n$ -ルーク問題の解は変換  $(abc)$  により不変ではない。
3. 立方体上の  $n$ -ルーク問題 ( $n$ -クイーン問題) の解において、もし置くルーク (またはクイーン) の数が奇数であるならば、その解は置換  $(ac)$  により不変ではない。

$n$ -ルーク問題に関して,  $1$  から,  $n \geq 2$  の時,  $\psi((abcd)) = \psi((ab)(cd)) = 0$  となるので, (3.2) から同値でない解の個数は,

$$\frac{1}{24}(\psi(e) + 6\psi((ab)) + 8\psi((abc))) \quad (3.3)$$

と求められる. もし  $n$  が奇数の時は  $2$  により  $\psi((abc)) = 0$  なので

$$\frac{1}{24}(\psi(e) + 6\psi((ab))) \quad (3.4)$$

と求められる. もし置かれるルークの個数が奇数であれば  $3$  により  $\psi((ab)) = 0$  なので

$$\frac{1}{24}(\psi(e) + 8\psi((abc))) \quad (3.5)$$

と求められる. 特に,  $n$  が奇数でありかつもし置かれるルークの個数が奇数であれば

$$\frac{1}{24}\psi(e) \quad (3.6)$$

となる.

$n$ -クイーン問題に関しても,  $1$  から,  $n \geq 2$  であるならば  $\psi((abcd)) = \psi((ab)(cd)) = 0$  となるので, (3.2) から同値でない解の個数は,

$$\frac{1}{24}(\psi(e) + 6\psi((ab)) + 8\psi((abc))) \quad (3.7)$$

と求められる. もし置かれるクイーンの個数が奇数であれば  $3$  により  $\psi((ab)) = 0$  なので

$$\frac{1}{24}(\psi(e) + 8\psi((abc))) \quad (3.8)$$

と求めることが出来る.

さらに, [5] において, 立方体上の解の組み合わせ的性質を利用して  $n$ -ルーク問題に関する  $\psi(e)$  が以下のように求められている.

1.  $n = 2k$  ( $k$  は自然数) のとき,

$$2^{3k} \times (k!)^3 \times \binom{2k}{k}^3$$

2.  $n = 2k + 1$  ( $k$  は自然数) のとき,

$$3 \times 2^{3k+1} \times (k+1)! \times (k!)^2 \times \binom{2k+1}{k}^3 \times \binom{k+1}{k}$$

このことから、もし  $n = 4m + 1$  ( $m$  は自然数) であれば、 $n$ -ルーク問題の同値でない解の個数は

$$2^{6m-2} \times (2m+1)! \times ((2m)!)^2 \times \binom{4m+1}{2m}^3 \times \binom{2m+1}{2m}$$

であることがわかる。従って  $n = 5, 9, 13, 17, \dots$  の時に限っては、 $n$ -ルーク問題の同値でない解の個数を理論的に求めることができる。

## 4 計算機実験

計算機実験を行い、立方体上の  $n$ -クイーン問題の解の個数を  $n = 8$  まで、 $n$ -ルーク問題の解の個数を  $n = 6$  まで求めた。結果を表 1, 2 に示す。

計算機実験には CPU : Intel Core i3(3.06 GHz), OS : Mac OS X バージョン 10.6.8, メモリ : 8 GB 1333 MHz DDR3, コンパイラ : GCC バージョン 4.4.3 を用いた。詳細は [5] を参照してほしい。

また計算にかかった時間を表 3 に示す。計算時間は Linux の time コマンドにより各 1 回計測した。 $n = 9$  の  $n$ -クイーン問題についても実験をおこなったが、1 週間程度の時間を要しても計算は終了しなかった。これまでの計算結果と計算時間から  $n = 9$  の場合は計算が実行時間で終わらないことが予想される。さらに大きな  $n$  に対しては、分散計算などの計算上の工夫が必要となる。

表 1: 立方体上の  $n$ -ルーク問題の解の個数

| $n$ | ルークの数 | $\psi(e)$ | $\psi((ab))$ | $\psi((abc))$ | 解の個数     |
|-----|-------|-----------|--------------|---------------|----------|
| 1   | 1     | 6         | 0            | 0             | 1        |
| 2   | 3     | 64        | 0            | 4             | 4        |
| 3   | 4     | 5184      | 24           | 0             | 222      |
| 4   | 6     | 110592    | 384          | 48            | 4720     |
| 5   | 7     | 27648000  | 0            | 0             | 1152000  |
| 6   | 9     | 884736000 | 0            | 960           | 36864320 |

## 参考文献

- [1] Rivin, I., Vardi, I., Zimmerman, P.: The  $n$ -queens problem, American Mathematical Monthly 101 (7) 629-639, (1994).

表 2: 立方体上の  $n$ -クイーン問題の解の個数

| $n$ | クイーンの数 | $\psi((e))$ | $\psi((ab))$ | $\psi((abc))$ | 解の個数     |
|-----|--------|-------------|--------------|---------------|----------|
| 1   | 1      | 6           | 0            | 0             | 1        |
| 2   | 3      | 16          | 0            | 4             | 2        |
| 3   | 4      | 816         | 8            | 0             | 36       |
| 4   | 6      | 1536        | 40           | 0             | 74       |
| 5   | 7      | 279648      | 0            | 0             | 11652    |
| 6   | 9      | 679200      | 0            | 0             | 28300    |
| 7   | 10     | 252520080   | 3736         | 0             | 10522604 |
| 8   | 12     | 719751840   | 10832        | 0             | 29992368 |

表 3:  $n$ -ルーク問題と  $n$ -クイーン問題の計算時間

| $n$ | 計算時間         |                     |
|-----|--------------|---------------------|
|     | $n$ -ルーク問題   | $n$ -クイーン問題         |
| 3   | 0.002 秒      | 0.002 秒             |
| 4   | 0.053 秒      | 0.022 秒             |
| 5   | 0.934 秒      | 3.107 秒             |
| 6   | 9 分 33.263 秒 | 35.271 秒            |
| 7   | —            | 3 時間 16 分 14.487 秒  |
| 8   | —            | 45 時間 46 分 10.185 秒 |

- [2] Hsiang, J., Hsu, D. F., and Shieh, Y.-P.: On the hardness of counting problems of complete mappings, *Discrete Mathematics*, 277 87-100, (2004).
- [3] Pólya, G.: Über die doppelt-periodischen Lösungen des  $n$ -Damen-Problems, in *George Polya: Collected papers Vol. IV* (G-C. Rota ed.) MIT Press (1984).
- [4] Barr, J. and Rao, S.: The  $n$ -Queens Problem in Higher Dimensions, *Elemente der Mathematik*, 61 (4) 133-137, (2007).
- [5] 藤原美早紀, 山村明弘: 立方体上の  $n$ -クイーン問題と  $n$ -ルーク問題, *情報処理学会論文誌*, 53 巻 6 号 1592-1601 (2012).
- [6] Yamamura, A.: Combinatorial designs on cubes, (準備中)