

長方形セル流の安定性と分岐：系の有限効果

大阪府立大学 工学部 村上洋一、松田紀男、福田浩昭

1. はじめに

平面上に同じ形の渦が2つの方向に周期的に並び、渦の格子が形成されている流れの安定特性および遷移の機構について考察する。このような流れをここではセル流と呼ぶ。このような流れは非平行流の一種であり、平行周期流の拡張として種々のセル流、正方形セル流[1]、菱形セル流[2]、三角形セル流[3]などの安定性については理論的に取り扱われている。また、乱流場に大規模構造が自発的に生じることを説明するという意図のもとでも取り扱われている[4]。

ここでは、次のような長方形セル流を扱う（図1）。

$$\Psi(x, y) = \sin kx \sin y,$$

長方形セル流は特に熱対流の流線パターンと非常によく似ているという点が他のセル流と比べて際立っている。線形安定性の無限領域についての計算結果が既にある[5]。

長方形セル流は実験室においても実現され、その安定性や遷移についての測定が行われている。Batchayev[6]やTabeling et al[7]は電解質溶液を広がった容器に薄く満たし、磁石をその容器の下に交互に並べて周期的な磁場を作り、一様な電流を一方向に流すことにより体積力としてのローレンツ力を発生させて、これを駆動力として周期的な渦構造を励起させている（図2）。Sommeria[8]は液体金属（水銀）に網目状に電流を流し、一様磁場を作用させてできたローレンツ力によって正方形セル流を実現している。

ここでは、様々な有限の系における臨界モードの選択則を見いだすこととその結果を実験と定量的に比較することを目的とする。

2. 定式化

基礎方程式は通常の2次元のナビエーストークス方程式に速度に比例する減衰項のついたものを用いる。付加する減衰項は薄い流体層の底でできる境界層の影響を水平速度成分で近似的に表したものである。渦度方程式を基礎方程式として用いる。主流を $\Psi(x, y) = \sin kx \sin y$ 、攪乱を $\psi(x, y, t)$ として代入

し、攪乱の非線形項を無視すると、次のようになる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta \Psi, \psi)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(\Delta \psi, \Psi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{R}(\Delta^2 - \lambda_0 \Delta)\psi,$$

ここで、 $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を用いている。

渦（セル）が縦に M 個、横に N 個並んでいる有限領域を考えていて、壁では本来粘性境界条件を用いなければならないが、ここでは仮定として非粘性境界条件を適用するので、攪乱の形は次のようになる。

$$\psi(x, y) = \sum_{m, n} a_{m, n} \sin\left(\frac{mkx}{M}\right) \sin\left(\frac{ny}{N}\right)$$

この式を攪乱方程式に代入して収束するまで Σ を有限で打ち切って固有値（増幅率、もしくは臨界レイノルズ数）を数値的に求める。パラメータとしては渦の縦横比 k （小さいほど縦長）、渦の配置 (M, N) と底の抵抗係数 λ_0 がある。

3. 線形安定性の結果

実験と関連して、図3に示すような6つの場合についての結果を示す。ここでは簡単のため底の抵抗は無視する ($\lambda_0 = 0$)。

- (a) 4つ渦の場合の特徴的なことは $0.67 < k < 1$ の範囲では定常なモードがでるが、 $0 < k < 0.67$ （縦長）の場合は振動型のモードがでるところである。レイノルズ数のオーダーは10前後である（図4(a)）。定常なモードの空間構造は領域と同じ大きさの一方方向に回転する渦（セル）である。
- (b) 渦列の方向に縮んだ渦が無限に並んでいる場合は、どのモードも定常であり、縦長ほど臨界レイノルズ数が小さくなっている。このモードの空間構造は近似的に $\sin y (-\pi/2 < y < \pi/2)$ と見なせ、(a) と同じように領域全体に広がった渦と考えられる。
- (c) 2つ渦の場合については図4(c)に示すように $k = 0.5$ で非常に大きな臨界レイノルズ数をとることがわかる。（十分収束していないので、どのような値になるかはわからない）また、 $0.5 < k < 1$ では定常で、 $0.5 < k < 1$ では振動しており、(a) と同様の傾向がある。(a) と同様に定常なモードの空間構造は領域と同じ大きさの渦である。
- (d) 渦列の方向に伸びた渦が無限に並んでいる場合は、臨界レイノルズ数が非常に大きくなり（図4(d)）、モードは列方向に正負交互の渦列が2重周期的に並ぶ構造をとる。

- (e) (d)が2列になっている場合は、図4 (e)に示すように複雑で、 $0 < k < 0.28$ では振動、 $0.28 < k < 0.37$ では定常、 $0.37 < k < 0.76$ では振動、 $0.76 < k < 1$ では定常のモードがでる。
- (f) (b)が2列になっている場合は、図4 (f)で示すように(a)の場合と(b)の場合が重なったものになっている。

4. 打ち切りモデルによる2次流

Tabeling et al の実験で観察された2次流のパターンを説明するために、前節の(b)で求めた固有関数を用いて打ち切りモデルを構成し、二次流を計算する。主流と攪乱を含めた流れ関数を Ψ とする。

$$\Psi = a_0 \sin kx \sin y + a_1 \sin kx + a_2 \sin 2kx \cos y$$

第1項は主流の成分を表し、残りの項は攪乱の成分である。固有値計算によると、攪乱を構成する他のフーリエ成分は小さいので省略してある。もとの渦度方程式に代入することにより、

$$\begin{aligned} da_0/dt &= -[k(3k^2 + 1)/2(k^2 + 1)]a_1a_2 - \nu(k^2 + 1 + \lambda_0)a_0 - F/(k^2 + 1), \\ da_1/dt &= (3k/4)a_0a_2 - \nu(k^2 + \lambda_0)a_1 \\ da_2/dt &= [k/2(4k^2 + 1)]a_1a_0 - \nu(4k^2 + 1 + \lambda_0)a_2 \end{aligned}$$

が得られる。

Tabeling et al. の実験では右まわり、左まわりに回転する渦が交互に並んだ構造が1次不安定の後に隣あった一方の列は傾きながら大きくなり、もう一方は収縮する事が観察されている。この渦の大きさ(横方向の幅)は図5 (a)の様に変化する。彼らは不安定の起こる近傍で分岐パラメータ(I, R_ν)と渦の大きさは比例していて、2次流への緩和時間も臨界点からの距離に依存しない事を観測している。ここでは、簡単のために Tabeling et al. (1987) の主流の流れ関数を $\Psi_0 = F/\{\nu(k^2 + 1)(k^2 + 1 + \lambda_0)\} \cos kx \cos y$ と仮定する。ただし、 ν : 粘性率、 λ_0 : 底の摩擦による抵抗、 I : 電流の強さ、 B : 磁場の強さ、 ρ : 流体の密度、 k : 主流の縦横比、 $F = (IB)/(2\pi\rho)\sqrt{\lambda_0/2k\sqrt{k^2 + 1}}$ である。

この打ち切りモデルの定常解を調べると、2つの定常解($\bar{a}_{00}, 0, 0$) (主流)と($\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2$) (2次流)が存在することがわかる。ここでは、この具体的な表

式は省略する。実験値 $k = 0.32$ 、 $\lambda_0 = 4.8$ を代入した結果が図 6 に示されている。主流が不安定になると安定な 2 次流が形成されることがわかる。

また、この定常解から求められた攪乱の成分比は、

$$|\bar{a}_2/\bar{a}_1| = 1/3\sqrt{6(k^2 + \lambda_0)/(4k^2 + 1)(4k^2 + 1 + \lambda_0)}$$

であることがわかる。図 7 に固有値計算（収束するまでモードをとっている）によって求めた成分比と比較している。抵抗のない場合は $k < 0.4$ で、実験値 $k = 0.32$ では抵抗の大きさにかかわらずよく一致することがわかる。これは線形モードを単に主流に重ね合わせることで実験で観察されたパターンを再現できた以前の結果 [5] を支持している。

5. Tabeling et al. の実験との比較

ここでは前節で求めた打ち切りモデルで求めた結果と実験結果を定量的に比較することを考える。主流の速さは底の効果を水平速度成分に比例する抵抗と見なす近似のもとで次のように表すことができる。

$$U_0 = (IBb/\rho\nu w) \times (\lambda_0/[2(k^2 + 1 + \lambda_0)\sqrt{k^2 + 1}])$$

打ち切りモデルによる臨界安定条件を電流で表すと、

$$I_c = (\rho\nu^2/B)(8\pi(k^2 + 1 + \lambda_0)/(3k^2)\sqrt{(k^2 + 1)(4k^2 + 1)(k^2 + 1 + \lambda_0)(4k^2 + 1 + \lambda_0)})/\lambda_0$$

になる。上の 2 つの式の右辺はすべて実験で与えられている値である。このようにして U と I_c を求めると、

$$\text{理論による値 } U_0 = 9\text{cm/s}, I_c = 0.802\text{mA}$$

となり、

$$\text{実験の測定値 } U_0 \approx 2\text{cm/s}, I_c = 9\text{mA}$$

と非常に異なっている。ここでは、 B と λ_0 を U_0 と I_c が実験値と計算値で一致するように 1 つの試みとして次のように補正した。

$$B(\text{補正值}) = 0.233B(\text{実験値}), \quad \lambda_0(\text{補正值}) = 2.185\lambda_0(\text{実験値})$$

実験で測定した渦の横幅は図 5 (a) のように変化する。打ち切りモデルによると、渦の横幅は次の関係式

$$L_1 = (2/\pi)\cos^{-1}(\bar{a}_1/\bar{a}_0), \quad L_2 = 2 - L_1$$

によって表される。図5 (b) は先ほどの補正值を用いてグラフにしたもので実験の値とかなり一致しているように見える。

6. 最後に

有限領域における安定性解析の結果により、様々なモードの入れ代わりが生じることが明らかになった。系統的にモードの選択則を見だし、その物理的な解釈をすることが次の課題である。

Tabeling et al の実験との比較を定量的に行ったが、補正をしなければならなかった。この原因はパラメータ、特に抵抗係数をより精密に評価する必要性を示唆している。

参考文献

- [1] K. Gotoh and M. Yamada, J. Phys. Soc. Jpn. **53** 3395 (1984).
- [2] K. Gotoh and M. Yamada, Fluid Dyn. Res. **1** 165 (1986).
- [3] M. Takaoka, J. Phys. Soc. Jpn. **58** 2223 (1989).
- [4] G. I. Sivashinsky and V. Yakhot, Phys. Fluids **28** 1040 (1985).
- [5] K. Gotoh, Y. Murakami and N. Matsuda, Phys. Fluids **7** 302 (1995).
- [6] P. Tabeling, B. Perrin and S. Fauve, Europhys. Lett. **3** 459 (1987), P. Tabeling, O. Cardoso and B. Perrin, J. Fluid Mech. **213** 511 (1990).
- [7] A.M. Batchayev, Izv. Atoms. Ocean. Phys. **25** 316 (1989).
- [8] J. Sommeria, J. Fluid Mech. **170** 139 (1986).

図1 長方形セル流

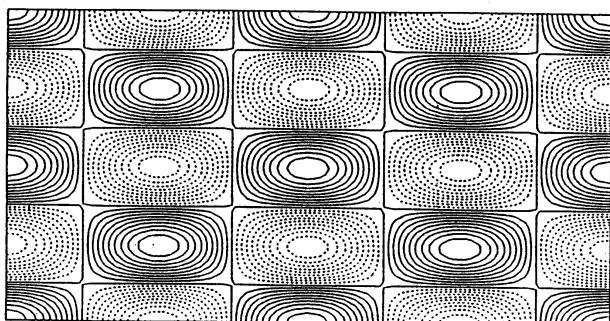
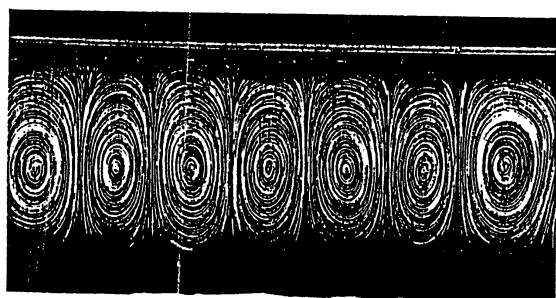


図2 実験例

(a) Tabeling et al

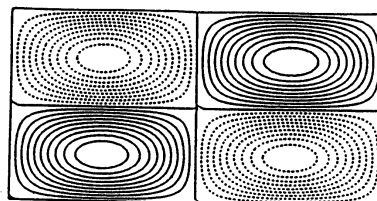
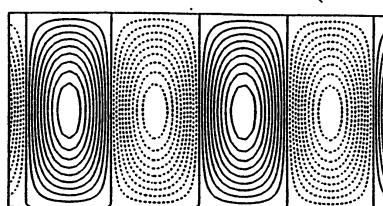


(b) Batchayev

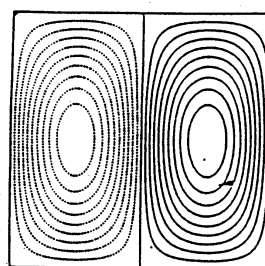


図3 有限領域のセル流

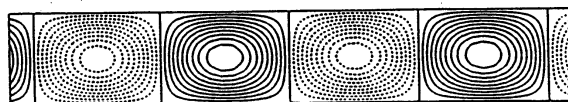
(a) 4つ渦 (Batchayev, Sommeria)

(b) 渦列の方向に縮んだ渦が無限に並んでいる
(Tabeling et al)

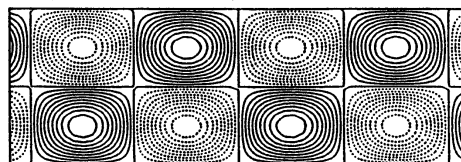
(c) 2つ渦



(d) 渦列の方向に伸びた渦が無限に並んでいる



(e) (d) が2列になっている



(f) (b) が2列になっている

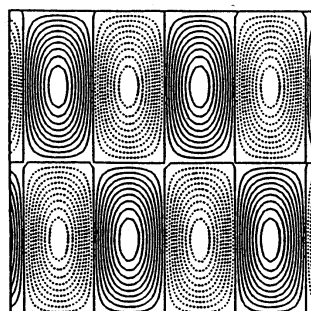
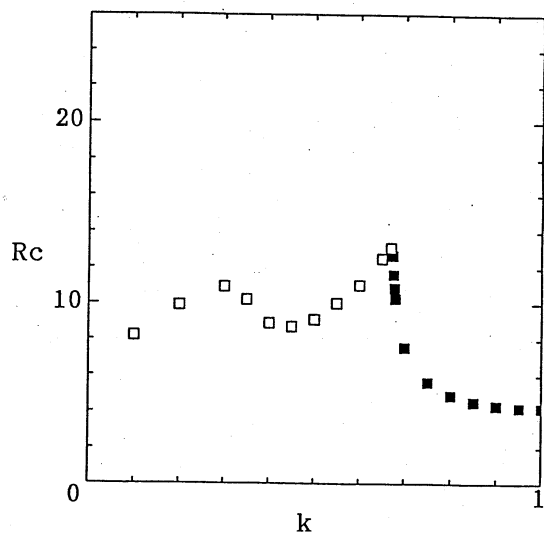
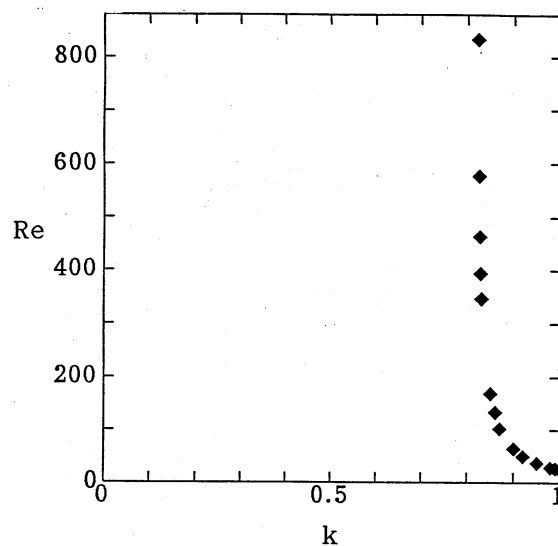


図4 中立曲線

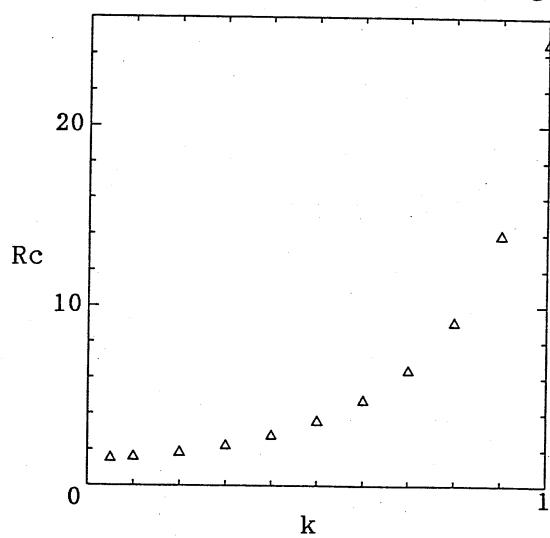
(a) 4つ渦 (Batchayev, Sommeria)



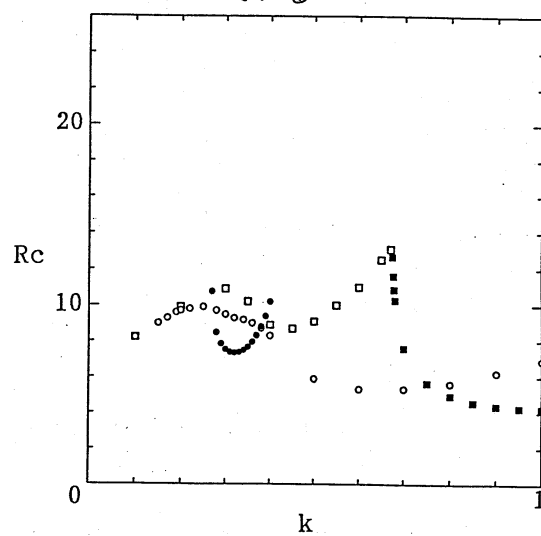
(d) 渦列の方向に伸びた渦が無限に並んでいる



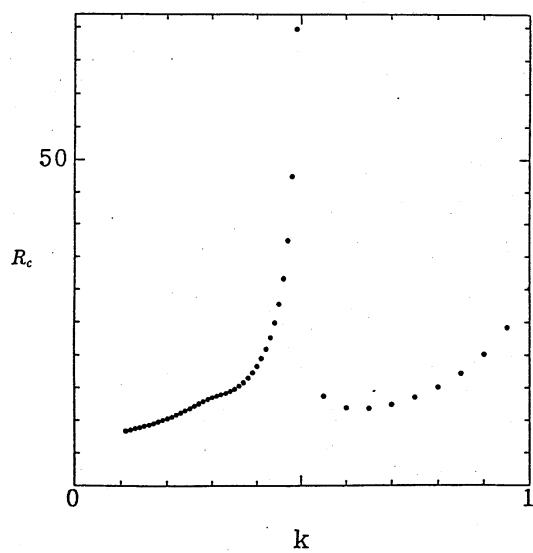
(b) 渦列の方向に縮んだ渦が無限に並んでいる



(e) (d) が2列になっている



(c) 2つ渦



(f) (b) が2列になっている

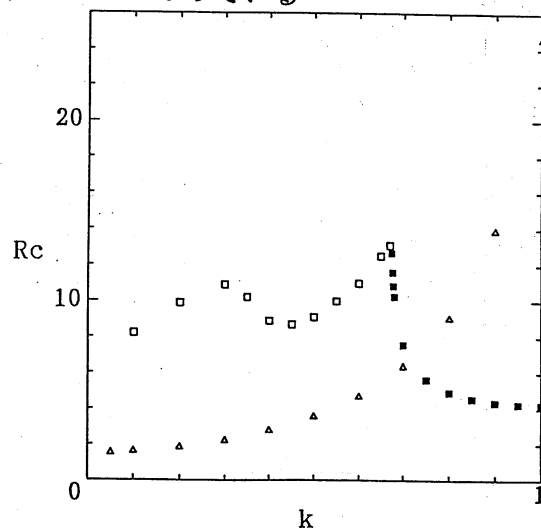
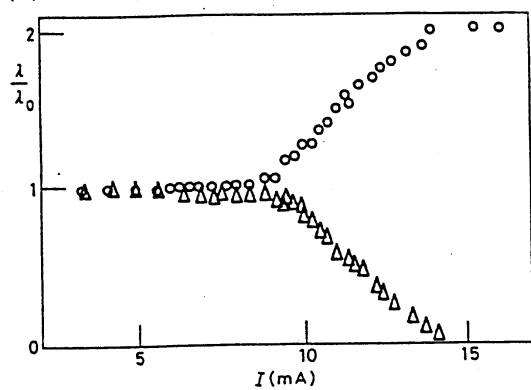


図5 渦の横幅の変化

(a) 実験



(b) 打ち切りモデルによる計算

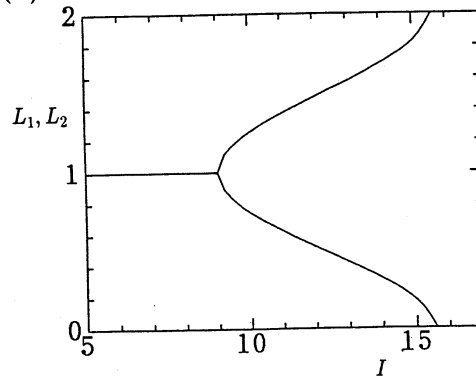


図6 主流と2次流

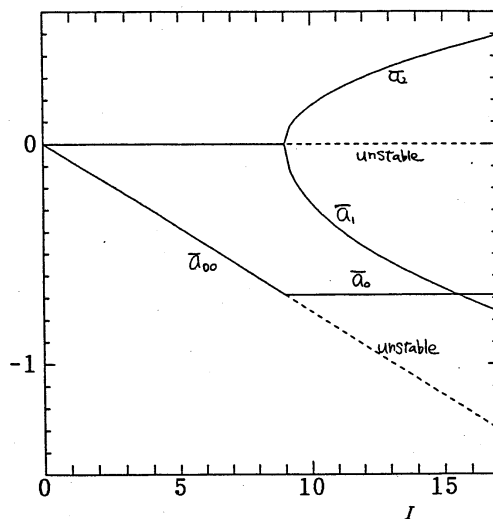
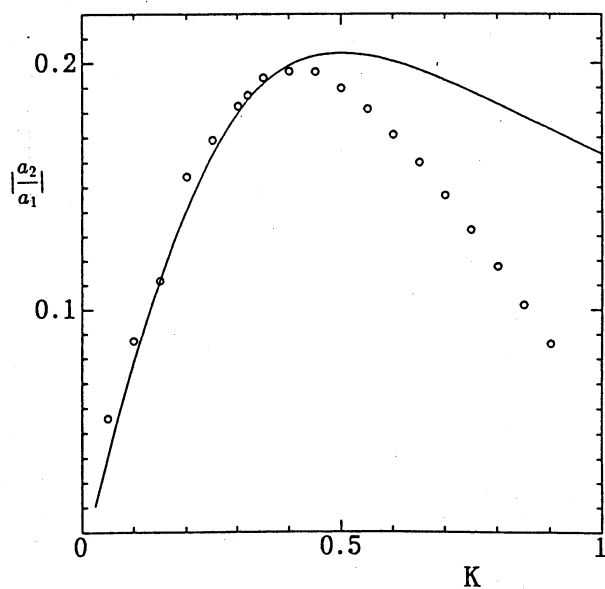


図7 固有値計算と打ち切りモデルによるフーリエモードの比

(a) $\lambda_0 = 0$ (b) $k = 0.32$ 