

Tensor Norm に関連した定数

北大 応電研 安藤 毅

1. Grothendieck [2] は抽象 M 空間のもつ extension の性質, および抽象 L 空間の lifting の性質をもとにして Categorical な方法で種々の tensor norm を導入し, これ等の間の基本的関係を確立した。

以下では n 次元実 $l_1^{(n)}$, $l_2^{(n)}$ および $l_\infty^{(n)}$ に限定して代表的な tensor norm 相互の最良評価, および $n \rightarrow \infty$ での最良評価値の漸近挙動について概観する。

2. Object α が tensor norm であるとは, 有限次元 Banach 空間のどの pair $\{E, F\}$ に対しても $E \otimes F$ の上の norm $\|\cdot\|_\alpha$ が定まり

$$(i) \quad \|x \otimes y\|_\alpha = \|x\| \cdot \|y\| \quad x \in E, y \in F.$$

(ii) $E' \otimes F'$ を $E \otimes F$ の dual と考えたとき $\|\cdot\|_\alpha$ の dual norm $\|\cdot\|_{\alpha'}$ は

$$\|x' \otimes y'\|_{\alpha'} = \|x'\| \cdot \|y'\| \quad x' \in E', y' \in F'$$

(iii) $A: E_1 \rightarrow E_2$, $B: F_1 \rightarrow F_2$ が linear のとき $A \otimes B: E_1 \otimes F_1 \rightarrow E_2 \otimes F_2$ と考えて $\|A \otimes B\| \leq \|A\| \|B\|$

E, F が一般の Banach 空間のときは $T \in E \otimes F$

$$\|T\|_\alpha = \inf \left\{ \|T\|_{M \otimes N} : T \in M \otimes N \subset E \otimes F \right\}$$

M, N 有限次元

で定める。

また α の dual norm に対応するのを α' でかく。
これ等の事に関しては Amemiya - Shiga [1] が読み易い。

E, F が有限次元のとき, $\mathcal{L}(E, F)$ と $E' \otimes F$ と同一視出来るから tensor norm は $T: E \rightarrow F$ への operator に対する norm と考えられる。

以下では M は抽象 M -空間, L は抽象 L -空間
 H は (実) Hilbert 空間, L_p は或る確率空間 (X, μ) 上の $L_p(X, \mu)$ をあつわす: とする。

全ての $T \in \mathcal{L}(E, F)$ に対し $\|T\|_\alpha \leq \|T\|_\beta$ のとき $\alpha \leq \beta$ (in $E' \otimes F$) とかく。また $\gamma_1 \|T\|_\alpha \leq \|T\|_\beta \leq \gamma_2 \|T\|_\alpha$ なる定数 γ_1, γ_2 があるとき $\alpha \sim \beta$ (in $E' \otimes F$) とかく。

以下で考察する tensor norm を定義しよう

$$\|T\|_E = \text{operator norm}$$

$$\|T\|_{\wedge E} = \inf \|B\| \cdot \|A\|$$

$$\|T\|_{E/} = \inf \|B\| \|A\|$$

$$\|T\|_{\wedge E/} = \inf \|C\| \|B\| \|A\|$$

$$\|T\|_H = \inf \|B\| \cdot \|A\|$$

$$\|T\|_2 = \inf \|B\| \cdot \|A\|$$

$$\|T\|_\pi = \inf \|B\| \cdot \|A\|$$

$$\|T\|_{/\pi} = \sup \frac{\|T \cdot A\|_\pi}{\|A\|}$$

$$\|T\|_{\pi \setminus} = \sup \frac{\|B \cdot T\|_\pi}{\|B\|}$$

$$\|T\|_{/\pi \setminus} = \sup \frac{\|B \cdot T \cdot A\|_\pi}{\|B\| \cdot \|A\|}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow A \quad \nearrow B & \\ & M & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow A \quad \nearrow B & \\ & L & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} E & & \xrightarrow{T} & & F \\ & \searrow A & & \nearrow C & \\ & M & \xrightarrow{B} & L & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow A \quad \nearrow B & \\ & H & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow A \quad \nearrow B & \\ & L_\infty \subset L_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow A \quad \nearrow B & \\ & L_\infty \subset L_1 & \end{array}$$

$$L \xrightarrow{A} E \xrightarrow{T} F$$

$$E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{B} M$$

$$L \xrightarrow{A} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{B} M$$

一般の tensor norm α に対し 新しい tensor norm $\wedge \alpha$, $\alpha \setminus$, $\wedge \alpha /$, $\dots$ の構成法はここに書かないが 上より 直ちに 類推出来るであらう。

3. n 次元 $\mathcal{L}_2^{(n)}$ 空間の回転群を G とし
 その上の normalized Haar measure を $m(\cdot)$ とする。
 次の公式が成り立つことに注意する:

$$(1) \quad \int_G \langle x, Sa \rangle \cdot \operatorname{sgn} \langle y, Sa \rangle dm(S) = M_n \langle x, y \rangle \frac{\|a\|}{\|y\|}$$

$$\text{ここで} \quad M_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

$$(2) \quad \int_G \langle x, Sa \rangle \cdot \langle y, Sa \rangle dm(S) = \frac{1}{n} \langle x, y \rangle \|a\|^2$$

$$(3) \quad \int_G \operatorname{sgn} \langle x, Sa \rangle \cdot \operatorname{sgn} \langle y, Sa \rangle dm(S) = 1 - \frac{2}{\pi} \theta(x, y)$$

$$\text{ここで} \quad 0 \leq \theta(x, y) \leq \pi \quad \cos \theta(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

定理 1 (cf. Grothendieck [2, §3], Gordon [3])

$$T \in \mathcal{L}_2^{(n)} \otimes \mathcal{L}_2^{(n)} \quad \text{で}$$

$$(i) \quad \varepsilon = \pi \leq \|\varepsilon\| = \varepsilon \leq (2) \leq \|\pi\| = \pi \leq \pi$$

$$(ii) \quad 1 \text{ は identity である}$$

$$\|1\|_\varepsilon = 1 \quad \|1\|_{\pi} = n M_n \quad \|1\|_2 = \sqrt{n}$$

$$\|1\|_{\pi} = \frac{1}{M_n} \quad \|1\|_\pi = n$$

$$(iii) \quad \alpha, \beta \in \{\varepsilon, \pi, 2, \pi, \pi\} \quad \text{で} \quad \alpha \leq \beta \quad \text{ならば}$$

$$\sup_T \frac{\|T\|_\beta}{\|T\|_\alpha} = \frac{\|1\|_\beta}{\|1\|_\alpha}$$

証明) (ii) π の定義を少し変形すれば

$$\|1\|_{\pi} \text{ の逆数 } = \sup_{\substack{\sigma \text{ 確測度} \\ \text{on } S^{n-1}}} \left\{ \inf_{\|x\|=1} \int |\langle x, u \rangle| d\sigma(u) \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \inf_{\|x\|=1} \int |\langle x, u \rangle| d\sigma(u) &= \int_{S^{n-1}} |\langle x, u \rangle| d(\int_G \sigma(s \cdot) dm(s)) \\ &= \int_G |\langle x, su \rangle| dm(s) = M_n \quad (1) \text{より} \end{aligned}$$

$$\therefore \|1\|_{\pi} = \frac{1}{M_n}.$$

Grothendieck [2] の成果の一つは $\|1\|_{H'} = \frac{1}{nM_n^2}$ を示したことである。次の様になるとよい。

$$L_1(G) \ni f \xrightarrow{\varphi} \int f(s) S \cdot dm(s) \cdot a \in \ell_2^{(n)}$$

$$\text{但し } \|a\|=1 \text{ fix.}$$

$$L_1(G)/\varphi^{-1}(0) \simeq \ell_2^{(n)} \text{ は isometric onto}$$

$$\text{定義を変形すると } \|1\|_{H'} = \|\varphi^* \circ \varphi\|_{H'}$$

$$L_\infty(G) \overset{J}{\subseteq} L_1(G) \text{ imbedding とする。} \quad (1), (2) \text{より}$$

$$\|J \circ \varphi^*(x)\| = M_n \|x\|, \quad \varphi \circ J \circ \varphi^* = \frac{1}{n}$$

$$\ell_2^{(n)} \xrightarrow{\varphi^*} L_\infty(G) \overset{J}{\subset} L_1(G) \xrightarrow{\varphi} \ell_2^{(n)} \xrightarrow{\varphi^*} L_\infty \overset{J}{\subset} L_1 \xrightarrow{\varphi} \ell_2^{(n)}$$

$$\frac{1}{n^2} \|1\|_{\pi} \leq \|\varphi \circ J\| \cdot \|\varphi^* \varphi\|_{H'} \cdot \|J \circ \varphi^*\| = M_n^2 \|1\|_{H'}$$

$$\therefore \frac{n}{n^2 M_n^2} \leq \|1\|_{H'} \quad \therefore \frac{1}{n M_n^2} \leq \|1\|_{H'}$$

逆の不等式を出すには次のようにする,

$$\begin{aligned}
 A &\stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_G \text{sgn}\langle a, Sa \rangle S \, dm(S) \right]^* \left[\int_G \text{sgn}\langle a, Sa \rangle S \, dm(S) \right] \\
 &= \int_G \left[\int_G \text{sgn}\langle Sa, Ra \rangle \cdot \text{sgn}\langle a, Ra \rangle \, dm(R) \right] S \, dm(S)
 \end{aligned}$$

を考えると, A は $\ell_2^{(n)}$ 上の positive definite operator
 で (1) を使うと, $Aa = M_n^2 a$ となり, 従って
 $\frac{1}{nM_n^2} A - \frac{1}{n} P_a$ は positive definite である, ここで
 P_a は a を含む 1次元部分空間への射影.

今

$$L_\infty(G) \ni h(S) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{nM_n^2} \int_G \text{sgn}\langle Sa, Ra \rangle \cdot \text{sgn}\langle a, Ra \rangle \, dm(R) - \langle a, Sa \rangle$$

を考えると, (2) より

$$\int_G h(S) S \, dm(S) = \frac{1}{nM_n^2} A - \frac{1}{n} P_a \quad (\text{posi. def.})$$

G は compact 群であるから, 上の positive definite 性
 から $h(S)$ の 逐点 意味としての positive definite が出る:

即ち $f \in L_1(G)$ に對し

$$\begin{aligned}
 &\int_G \int_G h(R^{-1}S) f(R) f(S) \, dm(R) \, dm(S) \\
 &= \frac{1}{nM_n^2} \int_G \left| \int_G f(R) \text{sgn}\langle Sa, Ra \rangle \, dm(R) \right|^2 \, dm(S) \\
 &\quad - \int_G \int_G f(R) f(S) \langle Ra, Sa \rangle \, dm(R) \, dm(S) \geq 0
 \end{aligned}$$

すなわち

$$\langle \varphi^* \varphi(f), f \rangle \leq \frac{1}{n M_n^2} \int_G |\langle f, \operatorname{sgn} \langle \xi a, \cdot a \rangle \rangle|^2 dm(\xi).$$

これから $\|\varphi^* \varphi\|_{H^1} \leq \frac{1}{n M_n^2}$ は容易に導かれる.

(cf. [1,]).

次に A, B を

$$\begin{array}{ccccc} \ell_2^{(n)} & \xrightarrow{T} & \ell_2^{(n)} & \xrightarrow{T^*} & \ell_2^{(n)} \\ & \searrow A & \nearrow B & \searrow B^* & \nearrow A^* \\ & L & & M & \end{array}$$

$$\|T\|_{\vee \varepsilon} = \|A\| \|B\| \text{ なる.}$$

定義から

$$\|T^* T\|_{\pi} \leq \|A^*\| \|B^*\| \|B\| \|A\| \|1\|_{H^1} = \frac{1}{n M_n^2} \|T\|_{\vee \varepsilon}^2$$

$$\text{一方 } \|T\|_2^2 = \|T^* T\|_{\pi}$$

$$\text{従って } \|T\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{n} M_n} \|T\|_{\vee \varepsilon}$$

$$\text{dual に } \|T\|_{\pi^1} \leq \frac{1}{\sqrt{n} M_n} \|T\|_2.$$

$$\text{よって } T=1 \text{ なら } \|T\|_{\pi^1} = \frac{1}{M_n} \quad \|T\|_2 = \sqrt{n} \text{ より}$$

$$\sup_T \frac{\|T\|_2}{\|T\|_{\vee \varepsilon}} = \sup_T \frac{\|T\|_{\pi^1}}{\|T\|_2} = \frac{1}{\sqrt{n} M_n} = \frac{\|1\|_{\pi^1}}{\|1\|_2}.$$

明かに $\|1\|_{\vee \varepsilon} \geq n M_n$, また

$$\ell_2^{(n)} \xrightarrow{\varphi^*} L_{\infty}(G) \overset{J}{\subset} L_1(G) \xrightarrow{\varphi} \ell_2^{(n)}$$

を考え $\|J \circ \varphi^*\| = M_n, \quad \varphi \circ J \circ \varphi^* = \frac{1}{n}, \quad \|\varphi\|=1$ なる

$$\frac{1}{n} \|1\|_{\vee \varepsilon} \leq M_n \quad \therefore \|1\|_{\vee \varepsilon} = n M_n$$

$$\text{従って } \sup \frac{\|T\|_2}{\|T\|_{\vee \varepsilon}} = \frac{\|1\|_2}{\|1\|_{\vee \varepsilon}}.$$

$$\text{最後に } \|T\|_{\pi^1} \leq \frac{1}{\sqrt{n} M_n} \|T\|_2 \leq \frac{1}{n M_n^2} \|T\|_{\vee \varepsilon} \quad T=1 \text{ なら}$$

$T=1$ なら等号が成立. (終)

この定理で tensor norm の相互評価の値として nM_n , $\frac{1}{M_n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}M_n}$, $\frac{1}{nM_n^2}$ が出て来るが、これ等の漸近挙動を示すため、

$$\Phi(n) \sim \Psi(n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{\Psi(n)} = 1$$

なる記法を使うと

$$\frac{1}{M_n} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}M_n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{および} \quad nM_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

4. $\ell_1^{(n)} \otimes \ell_1^{(n)}$ および $\ell_\infty^{(n)} \otimes \ell_\infty^{(n)}$ ではあまり正確には出ない.

定理 2 (Grothendieck [2], Lindenstrauss-Pelczynski [4]

Gordon [3]). $T \in \ell_\infty^{(n)} \otimes \ell_\infty^{(n)}$

$$(i) \quad \varepsilon = \backslash \varepsilon = \varepsilon /, \quad \pi \backslash = / \pi = \pi.$$

$$(ii) \quad \sup_T \frac{\|T\|_2}{\|T\|_\varepsilon} \leq \sqrt{n} \quad \sup_T \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_\varepsilon} \equiv J_n$$

$$\text{ここで} \quad \sqrt{n} \leq J_n \leq \frac{2^n n}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n-2k|}$$

$$(iii) \quad \sup \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_H} \equiv K_n$$

$$\text{ここで} \quad \lim_n K_n \geq \frac{\pi}{2} \quad \text{且} \quad K_n \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Dual norm に移ると

定理 2'. $T \in \ell_1^{(n)} \otimes \ell_1^{(n)}$

$$(i)' \quad \varepsilon = \setminus \varepsilon = \varepsilon / , \quad \pi = / \pi = \pi \setminus$$

$$(ii)' \quad \sup_T \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_\varepsilon} \equiv J_n \leq \frac{2^n n}{\sum_0^n \binom{n}{k} |n-2k|}$$

$$(iii)' \quad \sup_T \frac{\|T\|_2}{\|T\|_\varepsilon} \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

(証) (ii)' $\|T\|_\pi = \|T\|_{\pi \setminus} \leq \|T\|_\varepsilon \|1\|_{\pi \setminus}$
 $\ell(\ell_1^{(n)}, \ell_1^{(n)})$

$\ell_1^{(n)}$ の unit ball の 端点 が $\Omega = \{(\pm 1, \dots, \pm 1)\}$ の形より

定理 1 の場合と同じで 乗法群 Ω の Haar 測度 に対して

$$\|1\|_{\pi \setminus} \text{ の逆数 } = \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \ell_\infty^{(n)}}} \int |\sum_i x_i \omega_i| d\sigma(\omega).$$

$$= \frac{1}{2^n n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n-2k|$$

$$\text{従って} \quad \sup_T \frac{\|T\|_\pi}{\|T\|_\varepsilon} \leq \frac{2^n n}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n-2k|}.$$

(ii) の前半. 上と同じくして

$$\|1\|_2 = \left[\frac{2^n n^2}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-2k)^2} \right]^{1/2} = \sqrt{n}$$

$$\therefore \|T\|_2 \leq \|1\|_2 \cdot \|T\|_\varepsilon = \sqrt{n} \|T\|_\varepsilon.$$

(iii). Grothendieck [3] の最大の成果は 一般の

Banach 空間 の tensor 積で $\|T\|_H \leq \|T\|_{\pi \setminus} \leq \sinh(\pi/2) \|T\|_H$

を示した ことである. これは $\sup_n K_n \leq \sinh(\pi/2)$ と同じである.

$T \in \mathcal{L}_\infty^{(n)} \otimes \mathcal{L}_\infty^{(n)}$ と $\|T\|_H = 1$ とすると 定義から

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_1^{(n)} & \xrightarrow{T} & \mathcal{L}_\infty^{(n)} \\ & \searrow A \quad \nearrow B & \\ & \mathcal{L}_2^{(n)} & \end{array} \quad \|T\|_H = \|A\| = \|B\| = 1$$

のものがあつた。

$\mathcal{L}_1^{(n)}$ (および $\mathcal{L}_\infty^{(n)}$ の) canonical な基底を $e_1, \dots, e_n$ とする.

$x_j = A e_j$, $y_i = B^* e_i$ とすると T の matrix は

$$T = [\langle y_i, x_j \rangle] \quad \text{と} \quad 0 \leq \theta(y_i, x_j) < \pi \quad \text{と}$$

y_i と x_j の間の角とすると

$$\begin{aligned} \frac{\langle y_i, x_j \rangle}{\|y_i\| \|x_j\|} &= \cos \theta(y_i, x_j) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j)\right)^{2k+1} \end{aligned}$$

一方 (1) より

$$\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j) = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{G}} \operatorname{sgn} \langle y_i, Sa \rangle \cdot \operatorname{sgn} \langle x_j, Sa \rangle dm(S)$$

と

$$\| [\operatorname{sgn} \langle y_i, Sa \rangle \cdot \operatorname{sgn} \langle x_j, Sa \rangle] \|_\pi \leq 1$$

従つて $\mathcal{L}_\infty^{(n)} \otimes \mathcal{L}_\infty^{(n)}$ の π -norm の性質より

$$\| \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta(y_i, x_j) \right)^{2k+1} \right] \|_\pi \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2k+1}$$

また $\|A\| = \|B\| = 1$ より $\|x_i\|, \|y_j\| \leq 1$ より

$$\|T\|_\pi \leq \left\| \left[\frac{\langle y_i, x_j \rangle}{\|y_i\| \|x_j\|} \right] \right\|_\pi \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2k+1} = \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

これから $\|T\|_\pi \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \|T\|_H$.

5. J_n, K_n を実際に計算するのはかなり困難である.

$$J_2 \leq J_3 \leq \frac{2^3 \times 3}{\sum_0^3 \binom{3}{k} |3-2k|} = 2$$

$$\text{であり, } T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を考えて $\|T\|_E = 1$ (in $\ell_1 \otimes \ell_1$) 且 $\|T\|_\pi = 2$ より

$$J_2 = J_3 = 2$$

この T に対し $\|T\|_{H'} = \sqrt{2}$ が極値を与え

$$\sup_{S \in \mathcal{L}_{\ell_1 \otimes \ell_1}^{(H)}} \frac{\|S\|_\pi}{\|S\|_H} = \sqrt{2} \quad \text{となり}$$

$$K_2 = K_3 = \sqrt{2} \quad (\text{cf. Stephens \& Cohen [5]})$$

[文 献 大]

- [1] I. Amemiya & K. Shiga On tensor products of Banach spaces, Kodai Math. Rep. 9 (1957)
- [2] A. Grothendieck, Résumé de la théorie des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956)
- [3] Y. Gordon, On p -absolutely summing constants of Banach spaces, Israel J. Math. 7 (1969)
- [4] J. Lindenstrauss & A. Pełczyński, Absolutely summing operators in L_p spaces, Studia Math. 29 (1968)
- [5] Stephens & Cohen, Optimization problem for K_G (preprint)