

磁性流体 3 次元界面解析のためのいくつかの考察

北大大学院工学研究科 水 田 洋 (Yo Mizuta)

Grad. Sch. of Engineering, Hokkaido Univ.

1 はじめに

流体と磁場の微妙な相互作用の結果として生じる磁性流体界面現象の解析は、厳密な磁場解析を必要とする。任意の界面形状・外部印加磁場分布でも近似なく効率的に界面磁場を求めることは、誘導界面磁場を 3 次元界面磁場方程式から求める方法により可能になった [1, 2, 3]。したがって、この磁場解析を流体解析と組み合わせれば、界面現象に関する問題は一般的に扱うことができる。しかし、定常界面形状を決定したり時間ステップを追いながら界面形状変化を追う場合は、界面形状の変化ごとに界面磁場と磁気応力差を繰り返し求めることになり、更なる効率化が必要となる。

界面上で変化する応力和 S などの量は Flat Space の座標 $\mathbf{R} = (X, Y)$ の関数であるが、特に Real Space における界面上の点の界面座標を $\mathbf{r}(\mathbf{R}) = (x(\mathbf{R}), y(\mathbf{R}), z(\mathbf{R}))$ と表せば、多価になるほど複雑な界面形状も扱うことができる。ここでは、 $\mathbf{R}$ の連続量である $\mathbf{r}(\mathbf{R})$ を、周期関数列で展開したときの展開係数の組 $\tilde{\mathbf{r}}^1$ で特徴付ける。 $\tilde{\mathbf{r}}^1$ を与えれば、界面形状、界面磁場、応力和が求められる。しかし、流体解析に Bernoulli 方程式と力学的条件を用いて、界面応力のつりあい条件から $\tilde{\mathbf{r}}^1$ を求める過程は必然的に非線形で [3]、仮に与えた界面形状とその変化から応力和の変化を繰り返し計算することになる。ここに、最初に述べた界面磁場解析が関わってくることは言うまでもなく、より一層の簡素化が求められるが、本稿では、

1. 界面磁場展開係数による磁気応力差の表式
2. 3 次元界面磁場方程式の未知量分離
3. 3 次元界面磁場方程式における演算子行列

のうち、1., 2. を中心に述べる。

2 周期関数列

本節では、 $R = (X, Y)$ の関数として界面量を表すための周期関数列についてまとめる。

Flat Space の界面を a, b という格子ベクトルで離散化するとき、逆格子ベクトルは $A = (b \times z)\pi/[abz]$, $B = (z \times a)\pi/[abz]$ である (z は界面に垂直な単位ベクトル). 波数ベクトルは、逆格子ベクトルと整数の組 (n_1, n_2) により $n \equiv k_n = n_1 A + n_2 B$ と表される. $f_n^S(R) = \cos k_n \cdot R$ を対称な周期関数, $f_n^A(R) = \sin k_n \cdot R$ を反対称な周期関数として、これらを

$$\Phi(R) \equiv (f_n^S(R) | f_n^A(R)) \equiv (f_n(R)) \quad (1)$$

という行ベクトルにまとめる. ただし, $N = N_S + N_A$ である. なお, f_n^S で自由境界条件, f_n^A で固定境界条件を満たす量を扱うときは, $n_{1,2}$ は偶数に限る. また, n の下限は量によって異なるので, その都度示すことにする.

$n \equiv (n_1, n_2)$, $\ell \equiv (\ell_1, \ell_2)$ ($n_{1,2}, \ell_{1,2}$ は偶数), F を Flat Space における界面の積分領域面積とすれば, 周期関数の間には, 次の直交関係がある.

$$\frac{1}{\alpha_n} \langle f_n(R) f_\ell(R) \rangle = \delta_{n\ell}. \quad \left(\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{F} \iint_F dX dY \dots, \alpha_n \equiv \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 1/2 & (n \neq 0) \end{cases} \right) \quad (2)$$

3 定常界面形状の決定方法

界面形状の複雑さに制限されない流体解析を可能にするため, ここでは, 渦なしの理想流体を前提とする Bernoulli 方程式と, 界面上で成り立つ力学的条件を, 定常界面形状決定や動的解析の基礎方程式とする [4].

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla(D + G + p), \quad p = C + T + p_0. \quad (\text{界面上}) \quad (3)$$

ここで, $\varphi, v = \nabla \varphi, \rho, p, g, p_0, \kappa_{1,2}, \gamma$ を速度ポテンシャル・流速・密度・圧力・重力加速度・大気圧・主曲率・表面張力係数として, $D = \rho|v|^2/2$, $G = \rho g z$, $C = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)$ は動圧・重力ポテンシャル・表面張力である. また, $h_{X,Y}, b_Z, \mu_j, [\dots]$ を接線磁場・法線磁束密度・透磁率 ($j=1$: 流体, $j=2$: 真空)・界面を横切る値の跳び (2-1) とすれば, 磁気応力差は

$$T = [1/\mu_j] \{ \mu_1 \mu_2 (h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} / 2 \quad (4)$$

となる。界面方向偏微分を $\nabla_F \equiv (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$ と表して、(3) の両式から p を消去すれば、次の界面力学方程式が導かれる。

$$0 = \nabla_F \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S \right), \quad S \equiv D + G + C + T. \quad (5)$$

(5) を運動学的条件と連立させると、界面形状が時間変化する動的現象を扱うことができるが、定常界面を決定する場合は $\varphi = 0, D = 0$ として、

$$\nabla_F S = 0, \quad S \equiv G + C + T \quad (6)$$

がそのための条件となる。(6) が述べているのは $S = 0$ ではなく、応力和 S の界面上での分布が平らになることだけである。

ここで、Flat Space の座標 $\mathbf{R} = (X, Y)$ の関数である界面座標 $\mathbf{r}(\mathbf{R})$ 、応力和 $S(\mathbf{R})$ を周期関数列

$$\Phi^{(rS)}(\mathbf{R}) \equiv (f_n^S(\mathbf{R}) | f_n^A(\mathbf{R})) \equiv (f_n(\mathbf{R})) \quad (7)$$

で展開する。まず $\mathbf{r}(\mathbf{R})$ を

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}) \equiv \begin{pmatrix} x(\mathbf{R}) \\ y(\mathbf{R}) \\ z(\mathbf{R}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0(\mathbf{R}) \\ y^0(\mathbf{R}) \\ z^0(\mathbf{R}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi^{(rS)}(\mathbf{R}) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^{(rS)}(\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^{(rS)}(\mathbf{R}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{y}^1 \\ \tilde{z}^1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\equiv \mathbf{r}^0 + \Phi^{(r)} \tilde{\mathbf{r}}^1 \quad (9)$$

と表す。ここでは基本部分 $\mathbf{r}^0$ 以外の振動部分を周期関数列で展開し、 x, y, z それぞれの展開係数を $\tilde{\mathbf{r}}^1$ 中の列ベクトル $\tilde{x}^1, \tilde{y}^1, \tilde{z}^1$ にまとめた。これらの展開係数ベクトルは、いわば、波数スペクトルである。(9) は界面形状が液滴状、柱状でも扱える一般的な表式であるが、水平に近い界面に対しては、

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi^{(rS)}(\mathbf{R}) \tilde{z}^1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}^1 \equiv \begin{pmatrix} \tilde{z}_n^{1S} \\ \vdots \\ \tilde{z}_n^{1A} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{z}_n^1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_n^1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

を用いればよい。界面座標 $\mathbf{r}(\mathbf{R})$ と同様に、応力和 $S(\mathbf{R})$ も重力ポテンシャ

ル $G(\mathbf{R})$ ・表面張力 $C(\mathbf{R})$ ・磁気応力差 $T(\mathbf{R})$ と共に

$$\begin{aligned} S(\mathbf{R}) &= \Phi^{(rS)}(\mathbf{R})\tilde{S}, \\ G(\mathbf{R}) &= \Phi^{(rS)}(\mathbf{R})\tilde{G}, \\ C(\mathbf{R}) &= \Phi^{(rS)}(\mathbf{R})\tilde{C}, \\ T(\mathbf{R}) &= \Phi^{(rS)}(\mathbf{R})\tilde{T}, \end{aligned} \quad \tilde{S}(\tilde{z}^1) = \tilde{G} + \tilde{C} + \tilde{T} \equiv \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ N_S \end{matrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}_n^S \\ \vdots \\ \tilde{S}_n^A \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ N \end{matrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

と展開する. $S(\mathbf{R})$ は $r(\mathbf{R})$ の汎関数であり $r(\mathbf{R})$ は $\tilde{z}^1$ に応じて決まるが, このことを意識して, (11) では $\tilde{S}(\tilde{z}^1)$ と表している. (11) では $1 \leq n \leq N$ であって $n \neq 0$ なので, (6) の $\nabla_F S = 0$ は単に

$$\tilde{S}(\tilde{z}^1) = 0 \quad (12)$$

に置き換わる. (12) は非線形の N 元連立方程式であり, これから, $\tilde{z}^1$ の N 個の成分が決まる.

$G(\mathbf{R})$, $C(\mathbf{R})$ は界面形状の直接の関数なので, $\tilde{G}$, $\tilde{C}$ の $\tilde{z}^1$ 依存性を決めるのは比較的容易である. これとは対照的に, $T(\mathbf{R})$ は界面磁場を通して界面形状に依存する. このため, 次節以降にまとめた界面磁場解析まで遡って調べる必要がある.

4 界面磁場解析

流体 ($j=1$)・真空 ($j=2$) の各領域で, 調和場 (磁束密度ベクトル) f_j を考え, 界面上でその接線成分 ($I=X, Y$) または法線成分 ($I=Z$) である界面調和場 $g_{jI} \equiv t_I \cdot f_j$ を定義する. ただし, $t_X = \mathbf{r}_X/|\mathbf{r}_X|$, $t_Y = \mathbf{r}_Y/|\mathbf{r}_Y|$ は接線単位ベクトル ($\mathbf{r}_X = \partial\mathbf{r}/\partial X$, $\mathbf{r}_Y = \partial\mathbf{r}/\partial Y$), $t_Z = (t_X \times t_Y)/|t_X \times t_Y|$ は法線単位ベクトルである. 接線磁場・法線磁束密度は, 界面調和場と

$$h_{X,Y} = g_{jX,Y}/\mu_j, \quad b_Z = g_{jZ} \quad (13)$$

のように関係し, 次の界面条件が示すとおり, 両領域で共通である.

$$[h_{X,Y}] = [g_{jX,Y}/\mu_j] = 0, \quad [b_Z] = [g_{jZ}] = 0. \quad (14)$$

界面調和場・界面磁場は

$$g_{jI} = g_{jI}^0 + g_{jI}^1, \quad h_{X,Y} = h_{X,Y}^0 + h_{X,Y}^1, \quad b_Z = b_Z^0 + b_Z^1 \quad (15)$$

のように, 基本場 g_{jI}^0 , $h_{X,Y}^0$, b_Z^0 と誘導場 g_{jI}^1 , $h_{X,Y}^1$, b_Z^1 へ分離する. ここで

基本場は、既知の印加磁場 $\mathbf{h}^0$ から $g_{jI}^0 = \mathbf{t}_I \cdot \mathbf{f}_j^0 = \mu_j(\mathbf{t}_I \cdot \mathbf{h}^0)$, $h_{X,Y}^0 = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0$, $b_Z^0 = 2(\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0)/(1/\mu_2 + 1/\mu_1)$ のように直接求められる部分で、そのままでは界面条件を満たさないが、 $g_{jX,Y}^0, g_{jZ}^0$ に

$$\begin{cases} g_{jX,Y}^1 = \mu_j h_{X,Y}^1 \mp \tilde{b}_{X,Y}, \\ g_{jZ}^1 = b_Z^1 \mp \mu_j \tilde{h}_Z, \end{cases} \begin{cases} \tilde{b}_{X,Y} \equiv \frac{g_{2X,2Y}^0/\mu_2 - g_{1X,1Y}^0/\mu_1}{1/\mu_2 + 1/\mu_1} = 0, \\ \tilde{h}_Z \equiv \frac{g_{2Z}^0 - g_{1Z}^0}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}(\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0) \end{cases} \quad (16)$$

なる $g_{jX,Y}^1, g_{jZ}^1$ を加えると、界面条件を満たす。ただし、複号上/下は $j = 2/1$ に対応する。 $\mathbf{f}_j$ の誘導場 $\mathbf{f}_j^1 = g_{jX}^1 \mathbf{t}_X + g_{jY}^1 \mathbf{t}_Y + g_{jZ}^1 \mathbf{t}_Z$ に (16) を用いると、

$$\begin{cases} \mathbf{f}_j^1 \times \mathbf{t}_Z = \{(\mu_j h_X^1 \mp \tilde{b}_X) \mathbf{t}_X + (\mu_j h_Y^1 \mp \tilde{b}_Y) \mathbf{t}_Y\} \times \mathbf{t}_Z, \\ \mathbf{f}_j^1 \cdot \mathbf{t}_Z = b_Z^1 \mp \mu_j \tilde{h}_Z. \end{cases} \quad (17)$$

流体・真空各領域内に特異点があってもそれによる場を基本場として除去すれば、 $\mathbf{f}_j^1$ は各領域全域で調和性 $\nabla \times \mathbf{f}_j^1 = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{f}_j^1 = 0$ を満たす。このことは、Green の定理 (または Cauchy の積分公式の 3 次元化) から導いた、次の 3 次元調和場方程式で考慮する (複号上/下は $j = 2/1$ に対応)。

$$(\mathbf{t}_Z \pm \hat{\mathbf{G}}) \times (\mathbf{f}_j^1 \times \mathbf{t}_Z) + (\mathbf{t}_Z \pm \hat{\mathbf{G}})(\mathbf{f}_j^1 \cdot \mathbf{t}_Z) = 0, \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{G}} \equiv \frac{1}{\alpha} \iint_F |\mathbf{dS}_R| (\nabla' \psi), \quad \nabla' \psi = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \quad (19)$$

積分演算子 $\hat{\mathbf{G}}$ が示すように、(18) は界面調和場で閉じた積分方程式である。ここで F は界面全域、 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ は F 上の観測点とソース点 (以後ソース点に関する量に "''" をつける)、 $\psi(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ は Poisson 方程式の基本場、また α の値は $\mathbf{r}$ の近傍で F が局所的に平面なら $1/2$ である。界面上の積分は、 $|\mathbf{dS}_R| = |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| dX' dY'$ により Flat Space 上の積分に変換する。

(17) を (18) に代入し、両領域の方程式を加え合わせ、 $\mathbf{t}_{X,Y,Z}$ との内積をとれば、次の 3 次元界面磁場方程式が導かれる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & M\hat{G}_X \\ 0 & 1 & M\hat{G}_Y \\ 0 & 0 & 1 + M\hat{G}_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_X^1 \\ h_Y^1 \\ b_Z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{G}_X \\ \hat{G}_Y \\ \hat{G}_Z \end{pmatrix} \tilde{h}_Z, \quad \begin{cases} P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2, \\ M \equiv (1/\mu_2 - 1/\mu_1)/2, \\ \tilde{h}_Z \equiv -(M/P)(\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0), \end{cases} \quad (20)$$

$$\hat{G}_I[f(X', Y')] \equiv \iint_F |\mathbf{r}'_X| |\mathbf{r}'_Y| dX' dY' \frac{\mathbf{t}_I \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{4\pi \alpha P_I |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} f(X', Y'). \quad (21)$$

ただし、 $P_I = 1$ ($I=X, Y$), P ($I=Z$) と置いた。

誘導界面磁場 $h_{X,Y}^1, b_Z^1$ は、これらを周期関数列

$$\Phi^{(hb)}(\mathbf{R}) \equiv \begin{pmatrix} f_n^S(\mathbf{R}) \\ f_n^A(\mathbf{R}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_n^S(\mathbf{R}) \\ f_n^A(\mathbf{R}) \end{pmatrix} \quad (22)$$

で

$$\begin{cases} h_{X,Y}^1(\mathbf{R}) = \Phi^{(hb)}(\mathbf{R}) \tilde{h}_{X,Y}^1 \\ \quad = \sum_n f_n(\mathbf{R}) \tilde{h}_{Xn,Yn}^1 = \sum_n [f_n^S(\mathbf{R}) \tilde{h}_{Xn,Yn}^{1S} + f_n^A(\mathbf{R}) \tilde{h}_{Xn,Yn}^{1A}], \\ b_Z^1(\mathbf{R}) = \Phi^{(hb)}(\mathbf{R}) \tilde{b}_Z^1 \\ \quad = \sum_n f_n(\mathbf{R}) \tilde{b}_{Zn}^1 = \sum_n [f_n^S(\mathbf{R}) \tilde{b}_{Zn}^{1S} + f_n^A(\mathbf{R}) \tilde{b}_{Zn}^{1A}] \end{cases} \quad (23)$$

と展開したときの展開係数ベクトル

$$\tilde{h}_{X,Y}^1(\tilde{z}^1) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{h}_{Xn,Yn}^1 \\ \vdots \\ \tilde{h}_{Xn,Yn}^1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_Z^1(\tilde{z}^1) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{b}_{Zn}^1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{Zn}^1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

から求める。このために、直交関係 (2) を用いて、(20) を $\tilde{h}_{X,Y}^1, \tilde{b}_Z^1$ に対する線形連立方程式

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & G_X \\ 0 & 0 & G_Y \\ 0 & 0 & G_Z \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \tilde{h}_X^1 \\ \tilde{h}_Y^1 \\ \tilde{b}_Z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_X \\ G_Y \\ G_Z \end{pmatrix} \tilde{h}_Z. \quad (25)$$

に書き換える。ここで、積分演算子 $\hat{G}_I$ と印加磁場 h^0 はそれぞれ、以下の行列 G_I とベクトル $\tilde{h}_Z$ に含まれている。

$$G_I(\tilde{z}^1) \equiv \begin{pmatrix} G_{I,n\ell} \\ \vdots \\ G_{I,n\ell} \end{pmatrix}, \quad G_{I,n\ell} = \langle f_n(\mathbf{R}) \hat{G}_I f_\ell(\mathbf{R}) \rangle / \alpha_n, \quad (26)$$

$$\tilde{h}_Z(\tilde{z}^1) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{h}_{Zn} \\ \vdots \\ \tilde{h}_{Zn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_{Zn} = \langle f_n(\mathbf{R}) \tilde{h}_Z \rangle / \alpha_n. \quad (27)$$

(25) で界面形状に依存するのは $G_I, \tilde{h}_Z$ に限られ、これらを通じて $\tilde{h}_{X,Y}^1, \tilde{b}_Z^1$ は $\tilde{z}^1$ に依存する。

5 3次元界面磁場方程式の未知量分離

Gauss 消去法・自乗共役勾配法 (CGS 法) などを用いて、(25) をこのまま一挙に解いて $\tilde{h}_{X,Y}^1, \tilde{b}_Z^1$ を求める代わりに、初等的な行列演算で、未知量を $\tilde{h}_X^1 = G_X(1 + MG_Z)^{-1} \tilde{h}_Z$, (28)

$$\tilde{h}_Y^1 = G_Y(1 + MG_Z)^{-1}\tilde{h}_Z, \quad (29)$$

$$\tilde{b}_Z^1 = G_Z(1 + MG_Z)^{-1}\tilde{h}_Z. \quad (30)$$

のように分離する。ここで、 G_I は界面形状の情報、 $\tilde{h}_Z$ は基本場の情報を持つ。いずれも z^1 に依存し、誘導界面磁場の z^1 依存性はここから生じる。(28)–(30) は、界面形状・印加磁場によらず一般的に使える。いずれの成分も同じ形に表されており、特に、逆行列演算を含む $(1 + MG_Z)^{-1}\tilde{h}_Z$ の使い回しで計算時間を短縮できる。

界面磁場解析では、3次元界面磁場方程式を解くことに最も手間取るように思われる。しかし、実際はその構成、具体的には、 G_I 、 $\tilde{h}_Z$ の準備にはるかに多くの時間がかかる。もちろん、 G_I を数値的に計算するのではなく、[2] に述べた「3次元 Hilbert 変換の周期関数への作用」を利用してもそのようになる。

6 界面磁場展開係数による磁気応力差の表式

界面上で定義する各応力の中で、界面形状から直接定義される重力ポテンシャルや表面張力とは対照的に、磁気応力差 T は直接的には界面磁場 $h_{X,Y}$ 、 b_Z で表されている。このため、磁気応力差の界面形状依存性を求めるには、まず、磁気応力差と界面磁場の関係を簡潔に表しておかなければならない。応力和・界面座標はともに周期関数で展開してそれらの展開係数を扱うことから、ここでは、界面磁場の展開係数で磁気応力差の展開係数を表しておく。

界面磁場は、次のように、対称モード f_n^S ・反対称モード f_n^A (合わせて f_n) の周期関数列で展開する。

$$\begin{cases} h_{X,Y}(\mathbf{R}) = \sum_n f_n(\mathbf{R})\tilde{h}_{Xn,Yn} = \sum_n [f_n^S(\mathbf{R})\tilde{h}_{Xn,Yn}^S + f_n^A(\mathbf{R})\tilde{h}_{Xn,Yn}^A], \\ b_Z(\mathbf{R}) = \sum_n f_n(\mathbf{R})\tilde{b}_{Zn} = \sum_n [f_n^S(\mathbf{R})\tilde{b}_{Zn}^S + f_n^A(\mathbf{R})\tilde{b}_{Zn}^A]. \end{cases} \quad (31)$$

ただし、(23) と異なり、ここでは基本場も含めた $h_{X,Y}(\mathbf{R}) = h_{X,Y}^0 + h_{X,Y}^1$ 、 $b_Z(\mathbf{R}) = b_Z^0 + b_Z^1$ を展開している。同様に、磁気応力差も周期関数列で

$$T(\mathbf{R}) = \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \{ \mu_1\mu_2(h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} = \sum_n f_n(\mathbf{R})\tilde{T}_n = \Phi^{(rS)}(\mathbf{R})\tilde{T} \quad (32)$$

と展開すれば、展開係数 $\tilde{T}_n$ は次のようになる.

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{\alpha_n} \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \langle f_n(\mathbf{R}) \{ \mu_1 \mu_2 \{ (h_X(\mathbf{R}))^2 + (h_Y(\mathbf{R}))^2 \} + (b_Z(\mathbf{R}))^2 \} \rangle. \quad (33)$$

ただし、直交関係 (2) を用いた. (31) の第 2 辺で (33) を表せば,

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{\alpha_n} \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \sum_{l,m} \times \langle f_n(\mathbf{R}) f_l(\mathbf{R}) f_m(\mathbf{R}) \rangle \left\{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl} \tilde{h}_{Xm} + \tilde{h}_{Yl} \tilde{h}_{Ym}) + \tilde{b}_{Zl} \tilde{b}_{Zm} \right\}. \quad (34)$$

次に、周期関数の空間対称性を考慮しながら、(34) を書き換えていく. 波数ベクトルを $n \equiv k_n$, $l \equiv k_l$, $m \equiv k_m$ と略記すれば、まず、 $\langle f_n^A(\mathbf{R}) f_l^S(\mathbf{R}) f_m^S(\mathbf{R}) \rangle$, $\langle f_n^A(\mathbf{R}) f_l^A(\mathbf{R}) f_m^A(\mathbf{R}) \rangle$, $\langle f_n^S(\mathbf{R}) f_l^S(\mathbf{R}) f_m^A(\mathbf{R}) \rangle$, $\langle f_n^S(\mathbf{R}) f_l^A(\mathbf{R}) f_m^S(\mathbf{R}) \rangle$ は空間対称性から 0 となる. また、 $\tilde{d}(\mathbf{k}) = 1$ ($\mathbf{k} = 0$), 0 ($\mathbf{k} \neq 0$) を定義すれば、

$$\begin{aligned} & \langle f_n^S(\mathbf{R}) f_l^S(\mathbf{R}) f_m^S(\mathbf{R}) \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[+\tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n+l+m) + \tilde{d}(n-l+m) + \tilde{d}(n+l-m) \right], \\ & \langle f_n^S(\mathbf{R}) f_l^A(\mathbf{R}) f_m^A(\mathbf{R}) \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \left[+\tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n+l+m) - \tilde{d}(n-l+m) - \tilde{d}(n+l-m) \right], \\ & \langle f_n^A(\mathbf{R}) f_l^S(\mathbf{R}) f_m^A(\mathbf{R}) \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \left[-\tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n+l+m) + \tilde{d}(n-l+m) - \tilde{d}(n+l-m) \right], \\ & \langle f_n^A(\mathbf{R}) f_l^A(\mathbf{R}) f_m^S(\mathbf{R}) \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \left[-\tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n+l+m) - \tilde{d}(n-l+m) + \tilde{d}(n+l-m) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

を示すことができるので、(34) の $\tilde{T}_n$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \tilde{T}_n &= \frac{1}{\alpha_n} \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \sum_{l,m} \times \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \langle f_n^S(\mathbf{R}) f_l^S(\mathbf{R}) f_m^S(\mathbf{R}) \rangle \left\{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^S \tilde{h}_{Xm}^S + \tilde{h}_{Yl}^S \tilde{h}_{Ym}^S) + \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^S \right\} \\ & + \langle f_n^S(\mathbf{R}) f_l^A(\mathbf{R}) f_m^A(\mathbf{R}) \rangle \left\{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^A) + \tilde{b}_{Zl}^A \tilde{b}_{Zm}^A \right\} \\ & + \langle f_n^A(\mathbf{R}) f_l^S(\mathbf{R}) f_m^A(\mathbf{R}) \rangle \left\{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^S \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^S \tilde{h}_{Ym}^A) + \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^A \right\} \\ & + \langle f_n^A(\mathbf{R}) f_l^A(\mathbf{R}) f_m^S(\mathbf{R}) \rangle \left\{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^S + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^S) + \tilde{b}_{Zl}^A \tilde{b}_{Zm}^S \right\} \end{aligned} \right\} \quad (36) \\ &= \frac{1}{4\alpha_n} \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \sum_{l,m} \times \end{aligned}$$

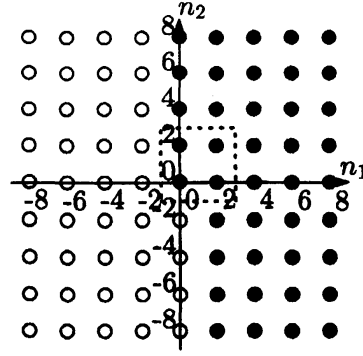


Fig. 1: モードの範囲

$$\times \left\{ \begin{aligned} & [+ \tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n+l+m) + \tilde{d}(n-l+m) + \tilde{d}(n+l-m)] \\ & \times \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^S \tilde{h}_{Xm}^S + \tilde{h}_{Yl}^S \tilde{h}_{Ym}^S) + \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^S \} \\ & + [- \tilde{d}(n-l-m) - \tilde{d}(n+l+m) + \tilde{d}(n-l+m) + \tilde{d}(n+l-m)] \\ & \times \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^A) + \tilde{b}_{Zl}^A \tilde{b}_{Zm}^A \} \\ & + [+ \tilde{d}(n-l-m) - \tilde{d}(n+l+m) - \tilde{d}(n-l+m) + \tilde{d}(n+l-m)] \\ & \times \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^S \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^S \tilde{h}_{Ym}^A) + \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^A \} \\ & + [+ \tilde{d}(n-l-m) - \tilde{d}(n+l+m) + \tilde{d}(n-l+m) - \tilde{d}(n+l-m)] \\ & \times \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^S + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^S) + \tilde{b}_{Zl}^A \tilde{b}_{Zm}^S \} \end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

ここで、(37)の $\tilde{T}_n$ について、必要かつ十分なモードの範囲を調べる。

すでに述べたように、波数ベクトルは、逆格子ベクトルと整数の組 (n_1, n_2) ($n_{1,2}$ は偶数) により $n \equiv k_n = n_1 A + n_2 B$ と表されるが、Fig. 1の各点は、波数ベクトルに対応する (n_1, n_2) を示している。(37)では、 $n \rightarrow -n$ としたとき $f_n^S \rightarrow f_n^S$, $f_n^A \rightarrow -f_n^A$ となることからわかるように、原点に関する反転で互いに移りあうモードは一次従属である。そこで、独立なモードの範囲を Fig. 1の黒点に限り、(37)でもこのような項同士の和の形にまとめてしまう。

1. $n \neq 0$ のとき、4つの $\tilde{d}$ の和の各行で $\tilde{d}$ の引数を較べると、第1項と第2項、第3項と第4項は共存せず、いずれか一方だけが値を持つ。
また、 $\alpha_n = 1/2$ である。
2. $n = 0$ のとき、4つの $\tilde{d}$ の和の各行で、第1項と第2項、第3項と第4項は同時に値が0でなくなるが、 $\alpha_n = 1$ である。

以上をまとめると、 $\tilde{d}$ の和の各行は2つずつの $\tilde{d}$ だけとなる。

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \sum_{l,m} \times \left\{ \begin{aligned} & [+ \tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n-l+m)] \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^S \tilde{h}_{Xm}^S + \tilde{h}_{Yl}^S \tilde{h}_{Ym}^S) + \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^S \} \\ & + [- \tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n-l+m)] \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^A) + \tilde{b}_{Zl}^A \tilde{b}_{Zm}^A \} \\ & + [+ \tilde{d}(n-l-m) - \tilde{d}(n-l+m)] \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^S \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^S \tilde{h}_{Ym}^A) + \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^A \} \\ & + [+ \tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n-l+m)] \{ \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^S + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^S) + \tilde{b}_{Zl}^A \tilde{b}_{Zm}^S \} \end{aligned} \right\}. \quad (38)$$

ここで、調和性・界面条件・境界条件と矛盾しないような、反対称な接線磁場、対称な法線磁束密度の組み合わせに限ることにして、 $\tilde{h}_{Xl,m}^S = \tilde{h}_{Yl,m}^S = \tilde{b}_{Zl,m}^A = 0$ とすれば、 $\tilde{T}_n$ は最終的に次の形になる。

$$\tilde{T}_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\mu_j} \right] \sum_{l,m} \times \left\{ \begin{aligned} & [+ \tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n-l+m)] \tilde{b}_{Zl}^S \tilde{b}_{Zm}^S \\ & + [- \tilde{d}(n-l-m) + \tilde{d}(n-l+m)] \mu_1 \mu_2 (\tilde{h}_{Xl}^A \tilde{h}_{Xm}^A + \tilde{h}_{Yl}^A \tilde{h}_{Ym}^A) \end{aligned} \right\}. \quad (39)$$

(39) の $\tilde{d}$ は、界面磁場モード l, m から、2次の非線形相互作用で磁気応力差モード $n = l \pm m$ が生じることを示している。このため、界面形状を時間発展させていくと、界面磁場モードが最初は Fig. 1 の点線領域だけであっても、ステップを追うごとにその外側に新しいモードが生まれ、その範囲が広がっていく。また、 $n = l - m$ が $n_2 < 0$ に生じたモードは原点に関して反転し、黒点範囲内の独立なモードだけ残すようにする。

これまでに述べた方法が妥当であることは、

(A) $T(\mathbf{R}) = [1/\mu_j] \{ \mu_1 \mu_2 (h_X^2 + h_Y^2) + b_Z^2 \} / 2$ のように直接求める、

(B) $T(\mathbf{R}) = \sum_n f_n(\mathbf{R}) \tilde{T}_n$ に (39) の $\tilde{T}_n(\tilde{h}_X, \tilde{h}_Y, \tilde{b}_Z) = \langle f_n(\mathbf{R}) T(\mathbf{R}) \rangle / \alpha_n$ を使う、

結果が一致することで確認した。ただし、最大設定範囲を外れたモードの切り落としによる影響を避けるため、(B) に用いた波数空間の $\tilde{h}_{X,Y}, \tilde{b}_Z$ から実空間の $h_{X,Y}, b_Z$ を求め、(A) に用いた。

7 まとめ

磁性流体の3次元界面解析のため、任意の界面形状から界面磁場、界面応力とを求める過程は確立した。しかし逆に、界面応力のつりあい条件から界

面形状を求めるためには Newton 法で非線形方程式を解く必要があり、仮に与えた界面形状とその変化から、繰り返し応力和の変化を計算することになる。このため、本研究の界面磁場解析では、界面座標、界面磁場、磁気応力差、応力和を全て周期関数列で展開し、界面座標から残りの量の値とそれらの勾配をできるだけ簡潔に求められるようにしてきた。

界面座標展開係数ベクトルを $\tilde{z}^1$ ，界面磁場展開係数ベクトルを $\tilde{h}_{X,Y}$ ， $\tilde{b}_Z$ ，磁気応力差展開係数ベクトルを $\tilde{T}$ ，積分演算子行列を G_I ，印加磁場ベクトルを $\tilde{h}_Z$ とすれば、本稿では、

1. 界面磁場展開係数による磁気応力差の表式： $\tilde{T}(\tilde{h}_X, \tilde{h}_Y, \tilde{b}_Z)$ ，
2. 3次元界面磁場方程式の未知量分離： $\tilde{h}_{X,Y}(G_I, \tilde{h}_Z)$ ， $\tilde{b}_Z(G_I, \tilde{h}_Z)$ ，
3. 3次元界面磁場方程式における演算子行列： $G_I(\tilde{z}^1)$

のうち、特に 1., 2. について述べた。これらは、本原稿執筆時点 (2008 年 1 月) において、数値解析コード上で改良前後の比較を完了して、結果が変わらず計算時間の短縮効果があることを確認している。3. については、「3次元 Hilbert 変換の周期関数への作用」を利用して既に時間短縮を図ったが、Newton 法に必要な、 $\tilde{z}^1$ に関する $G_I(\tilde{z}^1)$ の勾配を解析的に求めることに、最近進展があった。以上の改良が一通り終わった後、まず定常界面形状決定に取り組み、順次、動的解析・安定性解析へ適用範囲を拡げていく。

参考文献

- [1] 水田 洋: 任意形状界面・任意外場分布における 3 次元磁性流体自由表面解析; 磁性流体連合講演会講演論文集, 20, p.16 (2006).
- [2] 水田 洋: 「3 次元 Hilbert 変換」による界面磁場解析と磁性流体自由表面解析; 京都大学数理解析研究所講究録「波動現象の数理と応用」, 1543, p.31 (2007).
- [3] 水田 洋: 界面形状と界面磁場の相互関係を用いた磁性流体自由表面解析; 日本流体力学会年会 2007 講演要旨集 (<http://www.nagare.or.jp/nenkai2007/cd-rom/index.html>), 2-3-5-1 (2007).
- [4] R.E.Rosensweig: *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge), Chap.4, Chap.5 (1985).