

Cinderellaによる算数・数学の教材開発

静岡県立磐田南高等学校 入谷 昭 (Akira Iritani)
Iwata Minami High school

1 はじめに

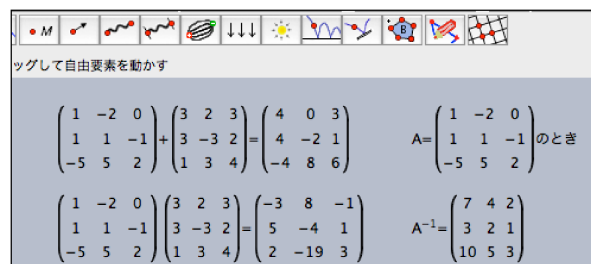
Cinderellaは動的幾何ソフトとして誕生したが、第2版での大幅な改訂で関数型プログラミング言語 Cindyscript を搭載した。これにより、Cinderella は統合型開発環境として生まれ変わり、さらに現在の版に至るまでにさまざまな機能を追加している。Cindyscript は Cinderella で作図した幾何要素を簡単にコントロールでき、特定の用途向けの数学ソフトを開発するのに非常に優れたプログラミング言語である。本稿では、Cinderella で開発した大学初年級から小学校までの算数・数学のソフトの一例を示し、特に小学校低学年における数の概念の形成とそれを援助するソフトの開発について論考する。

2 教材の例

2.1 行列計算機 (大学初年級)

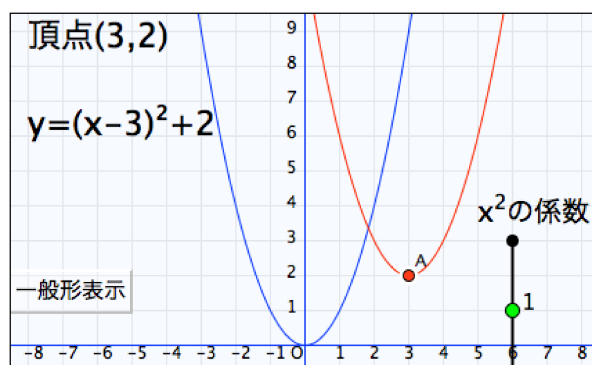
行列は、現行の学習指導要領で高等学校の数学から姿を消した。したがって、今まで高等学校で履修していた内容は大学初年級で学ぶことになる。かつて、高等学校の数学に行列がなく、大学で初めて行列に接していきなり抽象的な概念からスタートして理解に苦しんだことを思うと、今後もそのようなことが起こることは容易に予想される。線形代数の初歩の概念を理解するためには具体的に計算してみることが一番だが、計算結果の正誤を簡単に確かめるためには計算機によることになる。そこで、行列の和・積、行列式の値に加え、小行列や余因子行列、固有値などの計算を簡便に行える行列計算機を制作した。これらの線形代数の基本的な計算は Cindyscript に組み込み関数として用意されているので、その結果を行列の形で画面に表示することができればよい。これによりこれらの諸概念の理解を助けることができる。実際の操作は、Cindyscript エディタで行列をリストとして定義し、次のようなスクリプトで画面に表示する。

```
drawtext([10,6], "A="+Matrixform(MA)+"のとき");
```


$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 2 & -19 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

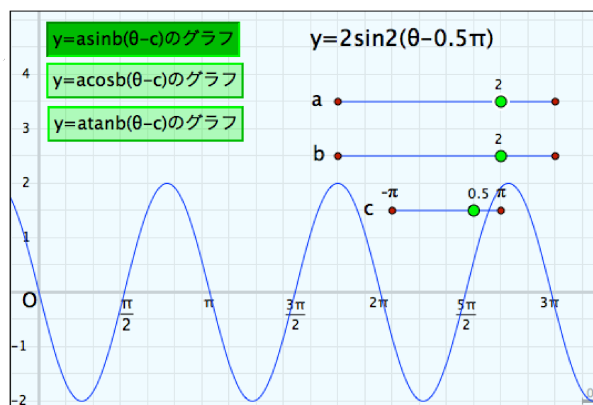
2.2 関数のグラフのシミュレーション（高等学校）

高等学校の数学ではじめに出てくる2次関数のグラフは非常に重要なものであるが、なかなかすっきりと理解されないのが現状である。そこで、関数の式とグラフの平行移動について、まず現象の観察から入る方向でのソフトを作成して授業を行ったところ、従来の半分以下の所要時間で理解をさせることができた。



このソフトでは、頂点をドラッグしてグラフを平行移動するとそれによって式が変化するようにになっている。これにより、頂点の位置とグラフの式の間をつかむ。次に、「なぜそうなるのか」を考えるのである。この段階での指導法はいろいろ考えられるが、いきなり一般論に入ることもできる。実際この手順で指導した。

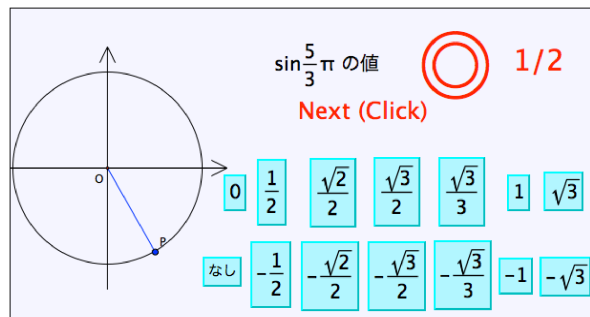
三角関数については、係数の値をスライダで変化させるとそれにつれてグラフが動くものを制作した。周期や振幅・位相と係数の関係がよくわかるようになっている。これも、いろいろと係数を変えることで、係数とグラフの変化を「現象」としてつかもうというわけである。



2.3 三角関数の値の練習（高等学校）

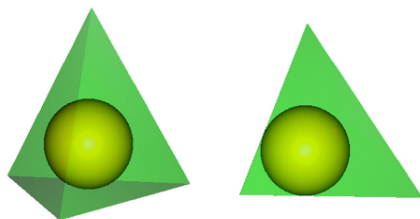
三角関数の理解の阻害要因の一つが、三角関数の値をなかなか覚えられないということである。後述する小学校低学年における練習回数の確保の重要性とも関連するが、「理屈がわかれば覚えられる」という簡単なものではない。そこで、画面上にランダムに単位

円と角を表す動径の図を表示し、値をマウスで選択してクリックする練習ソフトを制作した。



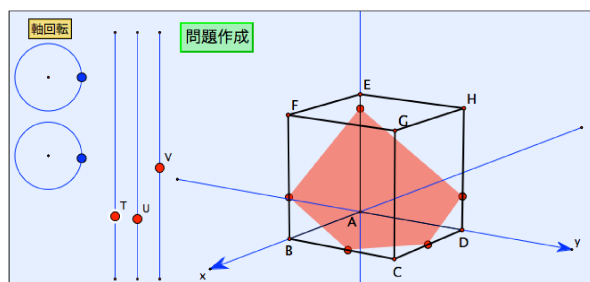
2.4 正四面体と内接球（高等学校）

正四面体に内接する球の半径を求めることは、三角比を用いた図形の計量の代表的な問題である。しかし空間図形であるがゆえに、イメージしにくいし、正確な図を描くのも慣れないとなかなか難しい。そこで、Cinderella のプラグイン Cindy3D を用いて、レイトレーシングを用いた図を作った。マウスドラッグで視点を変えることができ、内接球の半径を求めるのに適した図を探ることができる。



2.5 立方体の切断（中学校）

立方体の平面による切断面の形状を求める問題は、中学校の内容としてはやや高度なものになるが、空間図形の把握力を測るものとして典型的な問題である。要点は、辺上の2点を結ぶ直線とどの辺の延長線との交点を求めていくかということにあるが、これもいろいろとやってみて感覚を養っていくほかはない。図の左側の縦線スライダで切断面を変え、円形スライダで軸を回転して視点を変えることができる。



3 小学校低学年の言葉と数の認識を援助するソフト開発

3.1 小学校 1 年生の数の認識過程

2013 年 6 月より，小学校の先生とのコラボレーションで 1 年生の算数ソフトの開発を行っている．2014 年は 2 年目としての検証にも入っている．静岡県島田市の小学校に勤める名倉が授業を設計し入谷が開発をする．まず名倉が試用して改善し，次に実際に児童に使わせてさらに改善をする．当初は教師が使う提示用ソフトが主眼だったが，2013 年 10 月に児童 2 人 1 台の環境でコンピュータが使える環境が整ったため，児童が使うソフトの開発に移行した．その結果，次のようなことが明らかになった．

(1) 練習量の確保の必要性

足し算，引き算の計算を習得するためには，おとなが思っている数倍の練習量が必要である．そして，そのためにはコンピュータでの繰り返し練習が，プリントによるものより効果がある．

(2) 数の抽象化のハードル

数詞つきの数から，数詞なしの数への抽象化，「4 こ」から「4」への移行は，小学校 1 年生にとってはおおきなハードルである．これも，繰り返し練習によりまず感覚的に身につけていくのがよい．

(3) 言葉の認識

言葉の意味の認識は算数の学習においても重要な要素である．特に，文字を言葉として認識することの重要性を，指導する側はしっかりと認識する必要がある．

(4) 数直線の問題

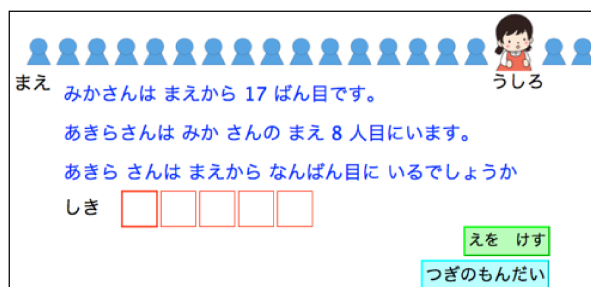
量としての数と順序を示す数とは異なる概念であり，それを抽象的な数として同列に扱うことは小学校低学年にとってはかなり困難である．

まず，(1) の練習量についてであるが，児童にとって必要な練習量はおとなが想像するよりはるかに多い．それは，足し算や引き算が，簡単に「覚えればできる」という性質のものではないということを示している．これは，小学校低学年に限らず高校生でも同じである．前述のように三角関数の値を即座に言えるようになるまではかなりの練習量を要する．そして，ただ暗記しただけではしばらくすれば全く忘れてしまうのだから，構造的に記憶していくことを考える必要がある．小学校 1 年生の足し算，特に引き算においても，「引く」という概念を形成しながら覚えていくでなければならない．ここで十分な練習をしておかないと，2 年生の足し算，引き算の筆算や 3 年生の掛け算の筆算になったときどんどん遅れを生じてしまう．そこで，授業の進行に合わせながら，現場の要求に応じて，ドリル形式の練習を段階を追って行うソフトを開発していった．

(2) の数への抽象化については容易に想像できることであろう．まず，数詞つきの足し算，引き算で数の概念に慣れる必要がある．そこで，文章題のパターンをいくつか用意して，数値だけを変えて出題する練習ソフトを作成した．文章には数詞がついているが，式には数詞はつけない．それによって，自然に抽象化することができるようになるのが狙いである．

(3) の言葉の意味の認識は (2) の文章題の問題とも関連するが、おとなにとっては当然な言葉使いも小学校 1 年生にとって阻害要因になることがある。たとえば、教科書に「13 は $10 + 3$ とかけました。10 は $5 + 5$, $6 + 4$ などとかけました」という表現がある。このなかの「かけました」でひっかるのである。「かけましたって、かけざん?」「どうしてかけたの」など、すんなりとはいかない。しかし、言葉が理解の妨げになっていることに気がつかないでいると、適切な指導ができないことになる。言葉の問題は後ほど再度扱う。

(4) 量としての数と順序を示す数、という概念は、小学校の算数教育の用語としては「集合数」「順序数」と呼んでいるが、おとなにとってはほとんど意識しない事柄である。小学校 1 年生では、ものの個数を数える場面と、子どもが並んでいて前から何番目か、という場面の違いである。そして、児童は順序数を苦手としている。「なんばんめ」と題したソフトは、「前から何番目か」「後ろに何人いるか」といったバリエーションの問題を、図で考えながら計算するソフトである。



この場面では、「まえ 8 にん目」をクリックすると、あきらさんの絵が出るようになっている。そのように状況を確認してから式を立てることができる。慣れてきたら、「えを けす」ボタンで絵を消し、文章だけで立式することになる。

これと関連するのが数直線である。数直線といっても、直線上の点に数に対応させるものではなく、単に自然数を並べるものである。たとえば、「20 までのかず」という単元では、「14」と書いたカードを、0 から 20 までいくつか欄をあけて並んでいるカードの適するところに入れる、という学習である。おとなにはなんでもないことだが、小学校 1 年生にとってはそう簡単ではない。(2) で示した抽象化がすでに行われており、数直線における数の大小の比較と量の比較が同じではないということである。これについても、また後に述べる。

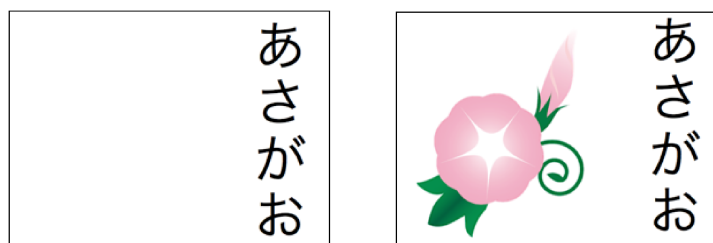
「おおきなかず」の単元では、0 から 99 までの数の並びについて、ゲーム風のソフトを作成した。出題される数が入る場所をクリックすると窓があいて、背景に隠れている写真がだんだん現れる、というものである。教科書では「カードを並べましょう」であり、プリントで練習をしても到底習熟するまでの題数をこなすことはできない。パソコンならばその何倍もの練習ができるのである。このソフトは背景写真に学校近くの風景を使ったこともあり、大変人気があった。

3.3 言語の取得との関係

ソフト開発を始めてから1年目で、算数の学習における言葉の問題がある程度明らかになった。2年目も名倉は1年生の担任となったので、4月当初から言葉の問題を意識して指導にあたることになった。

まずは、入学時に文字の認識がどの程度できるかの調査から行った。家庭環境や保育園・幼稚園の環境などで、入学時においてすでに子どもたちには格差が生まれている。まずは、ひらがな五十音が読めるかどうかから始まるのだが、ほとんど読めない児童もいた。入学時に、自分の名前は読めるようにしてくるようになっていたとのことだったが、自分の名前は読めるが他の子の名前は読めないという児童は多いのだ。そこで、ひらがなの読みの格差を縮めるための練習ソフトを作ったのだが、ここで、留意したことがある。それは、ひらがなは読めても、本を音読するとき、たどたどしくしか読めない、という実態についてである。なぜたどたどしく、一字一字を追っていくような読み方しかできないのか。それは、幾つかの文字をグルーピングして言葉として把握する、ということができていないからであろう。たとえば、おとなが「あさがお」という文字（言葉）を見たとき、「あ・さ・が・お」と認識するのではなく、実際の朝顔の花をイメージしながら一気に読むのである。知らない言葉の場合にはおとなでもサッと読むことはできない。つまり、文字を言葉としてグルーピングして認識することが必要なのである。

そこで、言葉としてひらがなを覚えていくソフトを制作した。始めは、画面に朝顔の絵を出して、「あさがお」を答えさせるものを作ったが、これでは問題解決にはならない。絵を見れば「あさがお」と答えられるからだ。そうではなく、「あさがお」の文字を出して読ませる。そのときに、児童の反応に応じてヒントとして絵を出すという、どちらかというといろく授業向けのソフトである。



3.4 九九の新しい覚え方

前述のように、量を数で表すことと、数の順序性についての概念の理解は別物で、特に数直線に関する理解は中学校における負の数、高等学校における2次不等式につながる重要事項である。たとえば、高校の数学Iのはじめに登場する

$x < a$ を満たす最大の整数が4であるとき、 a の値の範囲を求めよ

という問題に、県下有数の進学校である磐田南高校の生徒であっても半数が答えられないという現状は、遡ってみれば小学校1年生における数の順序性の理解に行き当たる。

この問題には、もう一つ、文字で表された数についての抽象性に対する理解の問題も含まれているが、これも遡れば、言葉を文字で表すという抽象性の問題で、やはり小学校1年生の「ひらがなで表された文章を文字としてではなく言葉として読む」という問題に行き当たるのではないだろうか。

ところで、2年生で学ぶ九九が計算における極めて重要な基本技術であるのに、小学校高学年や中学生になっても九九が言えない児童・生徒が多くいるのは周知の事実である。その原因を名倉と検討した結果、「九九を暗記する」ことが問題ではないかという結論に達した。「九九が言えるのに計算はできない」というのがその最たる例である。九九を覚えるために使う「九九の表」も問題である。「九九の表を見ながら気がついたことを考えましょう」という授業があるが、それは単にちょっとした性質を発見するにすぎず、構造的な理解には繋がっていない。暗記したものはいずれ忘れるし、暗記しても使えない、というのは構造的な理解ができていないからである。そして、九九の表は構造的な理解には役に立たない。これは単に「覚えるための」表でしかないからだ。

そこで、九九の構造的理解を助けるために、新しい発想に基づいた方法を考案した。といっても、実際には誰でもやっている方法である。すなわち、「 $5 \cdot 6 = 30$ が言えるなら、 $5 \cdot 7$ は30に6を足せばよい」という方法である。小学校教師の中には、それは頭の良い子ができる方法で、一般にはできないという人もいる。しかし、九九の構造はこの「5とびに答えがある」という、数直線上の数の並びにあるのではないか。この考えに基づき、次のようなソフトを開発した。

初歩では、問題の答えを数表（数が連続的に並んでいるので数直線と考えることができる。実際、小学校低学年ではこの表を数直線と関連づけている）の中の数字をクリックすることによって回答する。メニューによって、各段ごとに、正順、逆順、ランダムを選ぶことができる。理解が進んだらチャレンジコースでランダムな出題に答える。このときはキーボード入力となるが画面は同じである。一度に正解した分だけのくだものを集めることができる。

答えのばしよをクリックするか
キーボードで打ってEnter

$$7 \times 6 =$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

このソフトの利用は今年始めたので、その効果については今後の検証を待つ必要がある。また、指導者がこのソフトの意図をしっかりと理解していないと逆効果になる恐れもある。まずは学年末に例年と比較することができるが、実際には数年をかけて検証していく必要があるだろう。

4 おわりに

Cindyscript では、作図や計算だけでなく、画像表示が自由にできるため、絵をクリック・ドラッグして数の変化を見せる算数のソフトばかりでなく、国語のソフトまでも作成できる。教材をどのように画面上で見せるかを考えることにより、教材研究が深みを増すという効果もある。高校数学の教材は入谷自身が授業者としての発想で制作したが、小学校の教材開発では、授業者である名倉の現場感覚と入谷の教材作成の経験のコラボレーションにより制作している。「紙と鉛筆だけあればできる」と言われる大学の数学においても、教育的立場で見れば、効果的な教材を開発する余地はあるだろう。数学ソフトを使うだけでなく、自分の授業のためにカスタマイズや開発をしていくことにもっとシフトしていてもよいのではないだろうか。

参考文献

- | | | | |
|------------|------------------|------------|------|
| [1] 遠山啓 | 「親と子で学ぶ算数入門」 | SB Crative | 2014 |
| [2] 高校への数学 | 「解法のエッセンス 立体図形編」 | 東京出版 | 2013 |