

Solvable models in the spheroidal coordinates

京都工芸繊維大学 峯 拓矢

Takuya MINE

Kyoto Institute of Technology

1 序

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の座標

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\xi_1, \dots, \xi_d) \\ \vdots \\ x_d(\xi_1, \dots, \xi_d) \end{pmatrix}$$

は直交条件

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_k} = \sum_{l=1}^d \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_k} = 0 \quad (j \neq k)$$

が満たされているとき直交曲線座標 (orthogonal curvilinear coordinate) という. 実用上特に有用であるのはラプラシアン $-\Delta u = \lambda u$ を変数分離法で解くことの出来る座標であり, その分類は古くから知られている (岩波数学公式集 I [Mo-Ud-Hil] 参照). 2次元の場合, $\mathbb{R}^2$ を複素平面と同一視すれば正則関数 (等角写像) によって直交曲線座標を与えることができるが, このうちラプラシアンを変数分離できるものは本質的に直交座標・極座標・放物線座標・楕円座標の4つである. 3次元の場合, 上記4つの2次元座標に第3の座標を付け加えて得られる柱座標 (直交座標, 円筒座標, 放物柱座標, 楕円柱座標), または2次元座標の座標線 (ある座標が一定値となる曲線) をある軸の周りに回転して得られる曲面を座標面 (ある座標が一定値となる曲面) とすることで得られる回転体座標 (球座標, 回転放物面座標, 扁長回転楕円体座標, 扁平回転楕円体座標) があり, さらに一般の楕円体座標がある.

特に, d 次元の極座標を用いると, ラプラシアンは

$$-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{d-1}}$$

の形に表される. ここで, $\Delta_{S^{d-1}}$ は S^{d-1} 上の Laplace-Beltrami 作用素である. したがって, 空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ は動径方向の関数の空間 $L^2((0, \infty); r^{d-1} dr)$ と $\Delta_{S^{d-1}}$ の固有空間とのテンソル積に直交分解でき, 分解された各々の空間毎に Fourier 変換 (Fourier-Bessel 変換) を定義できる. この分解は考察の対象となる系が原点に関して回転対称性を持つ場合に特に有用である. 例えば, 動径方向の変数 $r = |x|$ のみに依存するようなポテンシャル $V(r)$ を持つ Schrödinger 作用素 $H = -\Delta + V(r)$ の散乱振幅は, $L^2((0, \infty); r^{d-1} dr)$ 上の常微分作用素

$$h_n = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\mu_n}{r^2} + V(r)$$

(μ_n は $-\Delta_{S^{d-1}}$ の固有値) の原点で有限な値を取る一般固有関数の無限遠方での挙動, 特にその一般固有関数を自由な系 ($V=0$) のものと比較した時の位相のズレ (phase shift) によって表すことができる.

同様の手法を2次元の楕円座標 (elliptic coordinate), あるいは3次元の楕円体座標 (spheroidal coordinate) を用いて行うことが本稿の目的である. これらの座標を用いた場合, 空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ ($d=2, 3$) の分解は極座標のときほど単純ではなく, フーリエ空間の各エネルギー面 $S_\lambda = \{p \in \mathbb{R}^d \mid |p|^2 = \lambda\}$ 毎に異なる基底を用いて空間を分解することになる ($d=2$ のときは命題 2.2). この分解は平面波の展開公式 (plane wave expansion formula) ($d=2$ のときは命題 2.1), すなわち平面波 $e^{ix \cdot p}$ を各座標に応じたラプラシアン的一般固有関数で展開する公式を用いて示される. この展開公式は 1950 年代には既に知られており, 2次元の場合は McLachlan [Mc] に, 3次元の場合は Flammer [Fl] に記されている. 平面波の展開公式が得られれば, Fourier の反転公式に代入することにより Fourier 解析における諸公式が導かれる.

楕円座標・楕円体座標の散乱理論への応用は, 波動方程式については 1947 年に著された McLachlan [Mc] の本で既に述べられている. 比較的最近のものとしては 1988 年の Gu-Qian [Gu-Qi] による 2次元での 2点 Aharonov-Bohm 型磁場 [Ah-Bo] における散乱振幅の計算, 2012 年の Seri [Se] による 2・3次元での電気双極子の散乱振幅・共鳴極の計算などがある. ただ, 本稿の著者が [Mi] で指摘したように Gu-Qian [Gu-Qi] の結果には若干の不備があり, 議論を正当化するためには後に述べる磁束の量子化条件 (15) が必要となる. 本稿では, この条件が成り立っている場合の Schrödinger 作用素の散乱振幅に対する具体的な表示を与え (定理 2.3), それを利用した数値計算の結果を紹介する.

目下のところ, 楕円座標・楕円体座標に関する研究は数値計算による工学的な応用が主であり, 先に述べた空間の分解構造の複雑さ, 特殊な問題でしか使えない応用性の低さから, 関数解析への応用は避けられて来た節がある. しかし, これらの座標を用いた時に現れる常微分方程式は (合流型) Heun の方程式 の呼ばれる型のものであり, 近年, 可積分系・表現論・非可換調和振動子など様々な分野から注目を集めている (竹村 [Ta] 参照). また, 極座標を用いて構成された物理モデルでは基本的に系の特異性は原点に集中しているが (Coulomb ポテンシャルなど), 扁平回転楕円体座標を用いれば, 3次元空間内の太さ 0 の輪の上に特異性を分散させたモデルを考えることも出来る. こういった系に関連する諸公式を整備し, 現在のコンピュータ技術を援用すれば, このようなモデルに関する数値計算も十分に実行可能となって来ている. 例えばフラクタルの数学がコンピュータ技術の発展と共に進化したように, ここから新たな数学・物理学上の知見が得られることに期待している.

2 楕円座標

2.1 楕円座標による Fourier 解析

a を正定数とすると, 2 点 $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$ を焦点とする楕円座標は次式で定義される.

$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \xi \cos \eta, \\ x_2 = a \sinh \xi \sin \eta, \end{cases} \quad \xi \geq 0, -\pi < \eta \leq \pi.$$

あるいは同値な式として

$$x_1 + ix_2 = a \cosh(\xi + i\eta) = \frac{a}{2} \left(e^{\xi+i\eta} + \frac{1}{e^{\xi+i\eta}} \right).$$

後者を見れば, 楕円座標は複素平面上の等角写像で定義される直交曲線座標であることが分かる. η は角度方向の変数, ξ は動径方向の変数であり, その座標曲線は図 1 の通りである.

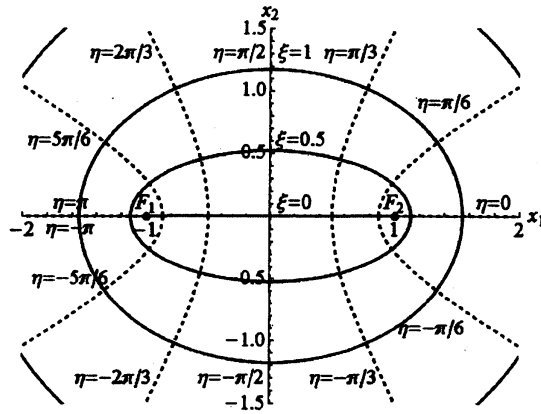


図 1: 楕円座標の座標曲線 ($a = 1$). $\xi = \text{一定}$ の曲線は楕円または線分, $\eta = \text{一定}$ の曲線は双曲線または半直線となる.

楕円座標によるラプラシアン表示は下記の通りである.

$$\Delta = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right), \quad J = \frac{a^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta).$$

J は楕円座標に関するヤコビ行列式である. したがって, 固有方程式 $-\Delta u = \lambda u$ において変数分離解 $u = f(\xi)g(\eta)$ を仮定すれば, 次の 2 つの常微分方程式を得る.

$$f''(\xi) + (2q \cosh 2\xi)f(\xi) = \mu f(\xi), \quad (1)$$

$$-g''(\eta) + (2q \cos 2\eta)g(\eta) = \mu g(\eta). \quad (2)$$

ただし, $q = a^2\lambda/4$ であり, μ は変数分離法により現れた定数である. 方程式 (2) は Mathieu 方程式 (Mathieu equation), (1) は変形された Mathieu 方程式 (modified Mathieu equation) と呼ばれている. 2つの方程式 (1), (2) は座標変換 $\eta = i\xi$ によって互いに移り合い, 複素変数の方程式とみなせば同値である. いずれの方程式も係数には特異性を持たず, 解は $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ について一価正則に拡張される.

楕円座標は2つの座標スリット $s_1 : (-a, a) \times \{0\}$, $s_2 : (-\infty, -a) \times \{0\}$ を持つ (図1 参照). したがって, 解 u が元の座標 (x_1, x_2) について一価であるためには次の2つの整合条件が必要となる.

$$g(\eta + 2\pi) = g(\eta), \quad (3)$$

$$f(-\xi)g(-\eta) = f(\xi)g(\eta). \quad (4)$$

1つ目の条件 (3) は角度方向に関数が周期 2π を持つというもので, 通常の極座標の場合と同じである. 2つ目の条件 (4) は図2で説明される.

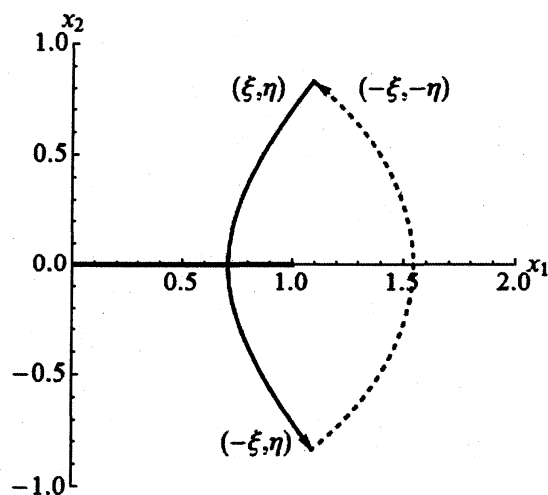


図 2: 楕円座標 (ξ, η) の点から出発し, ξ を $-\xi$ まで変えたのち, η を $-\eta$ まで変えると元の点に戻る.

したがって, $-\Delta$ の固有関数を求めるには, 常微分方程式系 (1), (2) の解で整合条件 (3), (4) を満たすものを求めればよい. 特に, (2), (3) によれば定数 μ は周期境界条件を課した Schrödinger 作用素 $H_q = -d^2/d\eta^2 + 2q \cos 2\eta$ の固有値であり, Mathieu の固有値 (Mathieu characteristic value) と呼ばれる. さらに, ポテンシャル $2q \cos 2\eta$ は偶関数であるので, H_q の固有関数 g は偶関数のもの $g = ce_n(\eta, q)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) および奇関数のもの $g = se_n(\eta, q)$ ($n = 1, 2, \dots$) に分類される. 前者を Mathieu の偶関数 (even Mathieu function), 後者を Mathieu の奇関数 (odd Mathieu function) と

呼ぶ. Mathieu 関数は次の条件を満たすように正規化しておく.

$$\begin{aligned} \text{ce}_n(0, q) &> 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\text{ce}_n(\eta, q)|^2 d\eta = \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{se}'_n(0, q) &> 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\text{se}_n(\eta, q)|^2 d\eta = \pi \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

特に $q = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \text{ce}_0(\eta, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \text{ce}_n(\eta, 0) &= \cos n\eta, \quad \text{se}_n(\eta, 0) = \sin n\eta \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

である. これより, ce_n, se_n は三角関数の一般化であることが分かる.

さらに, 整合条件 (4) を見れば解 f と解 g の偶奇性は同じであるので, $g(\eta) = \text{ce}_n(\eta, q)$ のときは $f(\xi) = \text{Ce}_n(\xi, q) = \text{ce}_n(i\xi, q)$ が解, $g(\eta) = \text{se}_n(\eta, q)$ のときは $f(\xi) = \text{Se}_n(\xi, q) = \text{se}_n(i\xi, q)/i$ が解となる. 関数 Ce_n, Se_n は変形された Mathieu 関数 (modified Mathieu function) と呼ばれる.

以上より, 楕円座標におけるラプラシアン固有値 λ に対する一般固有関数系

$$\begin{aligned} u &= \text{Ce}_n(\xi, q)\text{ce}_n(\eta, q) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ u &= \text{Se}_n(\xi, q)\text{se}_n(\eta, q) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が得られた. ただし, $q = a^2\lambda/4$ である. これらの解は 1868 年の Mathieu の論文 [Ma] で導かれ, 楕円膜の振動問題の解析に用いられている ([Mi] に固有関数のグラフがある).

次に Fourier 解析を論ずるため, 変形された Mathieu 関数 Ce_n, Se_n を正規化する. まず, $k > 0$ に対して $\lambda = k^2$, $q = a^2k^2/4$ とおき, 座標 $r = ae^\xi/2$ を導入する. このとき $\xi \rightarrow \infty$ のとき $r \sim |x|$ であることに注意する. 関数 Jc_n, Js_n を

$$\begin{aligned} \text{Jc}_n(\xi, q) &= \frac{\text{Ce}_n(\xi, q)}{C_n(q)}, \quad \text{Js}_n(\xi, q) = \frac{\text{Se}_n(\xi, q)}{D_n(q)}, \\ \text{Jc}_n(\xi, q) &\sim \text{Js}_n(\xi, q) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5)$$

で定義する. 正規化定数 $C_n(q), D_n(q)$ は Mathieu 関数の特殊値によって具体的に書き下すことができ, $q > 0$ について連続かつ 0 でない値を取る. (5) の右辺は, 極座標を用いて表されたラプラシアンの固有関数 $J_n(kr)e^{in\theta}$ (J_n は n 次の Bessel 関数) の r に依存する部分 $J_n(kr)$ の $r \rightarrow \infty$ における漸近挙動と同じである. この正規化を用いれば, 次の Mathieu 関数による平面波の展開式を得る.

命題 2.1 (McLachlan [Mc]). 配位空間で楕円座標を用い, 相空間で極座標を用いる. すなわち,

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2) = (a \cosh \xi \cos \eta, a \sinh \xi \sin \eta) \quad (\xi, \eta \in \mathbb{R}), \\ p &= (p_1, p_2) = (k \cos \tau, k \sin \tau) \quad (k > 0, \tau \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$q = a^2 k^2 / 4$ とおく. このとき, 平面波 $e^{ix \cdot p}$ は次のように展開される.

$$e^{ix \cdot p} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n Jc_n(\xi, q) ce_n(\eta, q) ce_n(\tau, q) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n Js_n(\xi, q) se_n(\eta, q) se_n(\tau, q). \quad (6)$$

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ で 1次元トーラスを表すとき, 級数 (6) は $\mathbb{R} \times \mathbb{T} \times (0, \infty) \times \mathbb{T}$ の任意のコンパクト部分集合に属する (ξ, η, k, τ) について一様収束する.

公式 (6) を通常極座標における平面波の展開公式と比較してみる. $x = (x_1, x_2) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $p = (p_1, p_2) = (k \cos \tau, k \sin \tau)$ とおくと, Bessel 関数の母関数展開 [Mo-Ud-Hi3, 149 頁]

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n$$

において $z = kr$, $t = ie^{i(\theta-\tau)}$ とおけば次が得られる.

$$\begin{aligned} e^{ix \cdot p} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in(\theta-\tau)} J_n(kr) \\ &= J_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr) \cos \theta \cos \tau \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(kr) \sin \theta \sin \tau. \end{aligned} \quad (7)$$

公式 (6) は楕円座標における公式 (7) の類似物とみなすことが出来る.

公式 (6) を Fourier の反転公式

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix \cdot p} \hat{u}(p) dp, \quad \hat{u}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot p} u(x) dx$$

に代入することにより, 次が得られる.

命題 2.2. $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ とし, $\hat{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ とする. $k > 0$ に対して $q = a^2 k^2 / 4$ と表し, Mathieu-Fourier 係数 $c_n(k)$, $d_n(k)$ を

$$\begin{aligned} c_n(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(k \cos \tau, k \sin \tau) ce_n(\tau, q) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ d_n(k) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(k \cos \tau, k \sin \tau) se_n(\tau, q) d\tau \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

と定める. このとき, u は次のように展開される.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^\infty c_n(k) Jc_n(\xi, q) ce_n(\eta, q) k dk \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_0^\infty d_n(k) Js_n(\xi, q) se_n(\eta, q) k dk. \end{aligned} \quad (8)$$

級数の収束は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合に属する (ξ, η) について一様である. また, *Plancherel* の等式は次のように表される.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} |c_n(k)|^2 k dk + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |d_n(k)|^2 k dk \right). \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 散乱理論への応用

展開 (8) は楕円座標に適合するような対称性を持つ系の解析に有用である. 例として, Gu-Qian [Gu-Qi], 南部 [Na], 伊藤-田村 [It-Ta], Šťovíček [St] らによって研究された, 2 点に台を持つ Aharonov-Bohm 型磁場 [Ah-Bo] に対する Schrödinger 作用素の散乱振幅の計算を行う.

実数 α_1, α_2 に対し, 2 点 $F_1(-a, 0), F_2(a, 0)$ に台を持つ Aharonov-Bohm 型磁場

$$2\pi\alpha_1\delta_{F_1} + 2\pi\alpha_2\delta_{F_2} \quad (10)$$

を与えるベクトル・ポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_{\alpha_1, \alpha_2}(x_1, x_2) &= \alpha_1 A_0(x_1 + a, x_2) + \alpha_2 A_0(x_1 - a, x_2), \\ A_0(x_1, x_2) &= \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2} \right) \end{aligned}$$

で与えられる. 対応する Schrödinger 作用素 H_{α_1, α_2} は

$$\begin{aligned} H_{\alpha_1, \alpha_2} &= (-i\nabla - A_{\alpha_1, \alpha_2})^2 \\ D(H_{\alpha_1, \alpha_2}) &= \{u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \mid u, (-i\nabla - A_{\alpha_1, \alpha_2})^2 u \in L^2(\mathbb{R}^2), \\ &\quad \limsup_{x \rightarrow F_j} |u(x)| < \infty \ (j = 1, 2)\} \end{aligned}$$

で定義される $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の自己共役作用素である. ここで, 点 F_1, F_2 を原点とする角度関数

$$\theta_1 = \arg(x_1 + a + ix_2), \quad \theta_2 = \arg(x_1 - a + ix_2)$$

を導入すると, 形式的には

$$H_{\alpha_1, \alpha_2} = e^{i(\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2)} (-\Delta) e^{-i(\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2)} \quad (11)$$

が成り立つ. α_1, α_2 のいずれかが整数でなければ上式の位相因子は多価関数となる. ここで $v = e^{-i(\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2)} u$ とおけば, 固有方程式 $H_{\alpha_1, \alpha_2} u = \lambda u$ はラプラシアン固有方程式 $-\Delta v = \lambda v$ と同値となるが, v は次式で表される多価性を持つ.

$$M_j v = e^{-2\pi i \alpha_j} v \quad (j = 1, 2). \quad (12)$$

ここで M_j は F_j のまわりのモノドロミー作用素, すなわち $M_j v(x)$ は点 x を起点として F_j のまわりを反時計回りに一周する経路に沿って多価関数 v の値を連続的に変化させた後の $v(x)$ の値を表す. ここで, (12) を満たす多価関数 v が楕円座標 (ξ, η) に関する一価関数として表されたとすると, 整合条件

$$v(\xi, \eta + 2\pi) = e^{-2\pi i(\alpha_1 + \alpha_2)} v(\xi, \eta), \quad (13)$$

$$v(-\xi, -\eta) = e^{-2\pi i\alpha_2} v(\xi, \eta) \quad (14)$$

が成り立たねばならない. ここで, (14) を 2 回使うと

$$v(\xi, \eta) = (e^{-2\pi i\alpha_2})^2 v(\xi, \eta) \Leftrightarrow e^{-2\pi i\alpha_2} = \pm 1$$

となり, したがって α_2 は $1/2$ の整数倍である. さらに (13) より

$$v(-\xi, 2\pi - \eta) = e^{-2\pi i(\alpha_1 + \alpha_2)} v(-\xi, -\eta) = e^{-2\pi i\alpha_1} v(\xi, \eta)$$

となり, この式を 2 回使うと α_1 も $1/2$ の整数倍であることが分かる. したがって, 固有関数 v が楕円座標 (ξ, η) の一価関数として表されるためには

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \quad (15)$$

が必要である. ここまでの議論では物理定数は $\hbar = h/(2\pi) = 1$, $m = 1/2$, $e = 1$ と正規化しているが, 物理定数を考慮すれば条件 (15) はソレノイドを貫く磁束が**磁束量子** (magnetic flux quantum) $\Phi_0 = h/(2e)$ の整数倍であるという条件となり, 超伝導の理論における**磁束の量子化条件**と一致している.

α_1, α_2 が整数でなく, かつ (15) が成り立つならば, (11) により適当なゲージ変換で

$$\alpha_1 = -1/2, \quad \alpha_2 = 1/2$$

の場合に帰着できるため, 以下ではこの場合について考える. このとき, $v = f(\xi)g(\eta)$ とおけば, 整合条件 (13), (14) は

$$g(\eta + 2\pi) = g(\eta), \quad (16)$$

$$f(\xi)g(\eta) = -f(\xi)g(\eta) \quad (17)$$

となる. (16) は (3) と同じであり, したがって g は再び $g = \text{ce}_n(\eta, q)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) または $g = \text{se}_n(\eta, q)$ ($n = 1, 2, \dots$) となる. 一方, (17) は (4) と異なり, f と g が反対の偶奇性を持つことを意味する. $g = \text{ce}_n(\eta, q)$ のとき, f は変形された Mathieu 方程式 (1) の奇関数解であるが, これを $\text{Fe}_n(\xi, q)$ と表す. また, $g = \text{se}_n(\eta, q)$ のとき, f は (1) の偶関数解であるが, これを $\text{Ge}_n(\xi, q)$ と表す. このようにして, $H_{-1/2, 1/2}$ の固有値 λ に対する一般固有関数

$$u = e^{i(-\theta_1 + \theta_2)/2} \text{Fe}_n(\xi, q) \text{ce}_n(\eta, q) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$u = e^{i(-\theta_1 + \theta_2)/2} \text{Ge}_n(\xi, q) \text{se}_n(\eta, q) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が得られた。ただし, $q = a^2\lambda/4$ である。

ここで, 関数 Fe_n, Ge_n を次のように正規化しておく。

$$\begin{aligned} Jf_n(\xi, q) &= \frac{Fe_n(\xi, q)}{E_n(q)}, \quad Jg_n(\xi, q) = \frac{Ge_n(\xi, q)}{F_n(q)}, \\ Jf_n(\xi, q) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \delta_{n,k}\right) \quad (r \rightarrow \infty), \\ Jg_n(\xi, q) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \epsilon_{n,k}\right) \quad (r \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

ただし, $q = a^2k^2/4$, $r = ae^\xi/2$ であり, $E_n(q), F_n(q)$ は正規化定数である。因子 $\delta_{n,k}, \epsilon_{n,k}$ は自由な状態 (5) からの位相のズレ (phase shift) を表しており, Mathieu 関数の特殊値を用いて表すことができる。

これらの解を用いて, 波動作用素

$$W_\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

を計算する。ただし, H_0 は自由なラプラシアン $-\Delta$ である。良く知られたように, 位相のズレ $\delta_{n,k}, \epsilon_{n,k}$ が与えられたとき作用素 $W_\pm$ の作用は形式的には

$$W_\pm (Jc_n(\xi, q)ce_n(\eta, q)) = e^{\mp i\delta_{n,k}} Jf_n(\xi, q)ce_n(\eta, q), \quad (18)$$

$$W_\pm (Js_n(\xi, q)se_n(\eta, q)) = e^{\mp i\epsilon_{n,k}} Jg_n(\xi, q)se_n(\eta, q) \quad (19)$$

で表される。より正確には, 波動作用素 $W_\pm$ の作用により, Fourier の反転公式 (8) で表される波束は, (8) の被積分関数に $W_\pm$ を形式的に作用させて (18), (19) に従って置き換えて得られる波束に写される。よって, 散乱作用素 $S = W_+^* W_-$ の作用は

$$S (Jc_n(\xi, q)ce_n(\eta, q)) = e^{2i\delta_{n,k}} Jc_n(\xi, q)ce_n(\eta, q),$$

$$S (Js_n(\xi, q)se_n(\eta, q)) = e^{2i\epsilon_{n,k}} Js_n(\xi, q)se_n(\eta, q)$$

で与えられる。

一方, k を固定したとき, $\hat{u}(k \cos \tau, k \sin \tau)$ の Mathieu 関数に関する Fourier 級数展開は

$$\hat{u}(k \cos \tau, k \sin \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) ce_n(\tau, q) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(k) se_n(\tau, q)$$

で与えられる。よって, 展開 (8) を考慮すれば, $\mathcal{F}$ で Fourier 変換を表すとき,

$$\mathcal{F} S \mathcal{F}^* \hat{u}(k \cos \tau, k \sin \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) e^{2i\delta_{n,k}} ce_n(\tau, q) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(k) e^{2i\epsilon_{n,k}} se_n(\tau, q)$$

となる。この式は, $\mathcal{F} S \mathcal{F}^*$ をエネルギー面

$$S_{k^2} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p|^2 = k^2\} = \{(k \cos \tau, k \sin \tau) \mid \tau \in \mathbb{T}\}$$

上の関数空間 $L^2(S_{k^2}; d\tau)$ に制限したとき, 固有関数の完全系は $\{ce_n(\tau, q)/\sqrt{\pi}\}_{n=0}^\infty$ および $\{se_n(\tau, q)/\sqrt{\pi}\}_{n=1}^\infty$ により与えられ, 対応する固有値は $e^{2i\delta_{n,k}}, e^{2i\epsilon_{n,k}}$ となることを意味する. 一般に, $S(\theta, \theta'; k^2)$ を $\mathcal{FSF}^*|_{S_{k^2}}$ の積分核とすると, 入射方向 θ' , 反射方向 θ の散乱振幅は公式

$$f(\theta' \rightarrow \theta; k^2) = \sqrt{\frac{2\pi}{ik}} (S(\theta, \theta'; k^2) - \delta(\theta - \theta'))$$

で与えられるため, 上に述べた事実により散乱振幅が計算できる. さらに, Mathieu 関数の性質を利用することにより, 次の結果が得られる.

定理 2.3. 作用素 $H_{-1/2, 1/2}$ のエネルギー k^2 に対する入射方向 θ' , 反射方向 θ の散乱振幅は次の級数で与えられる.

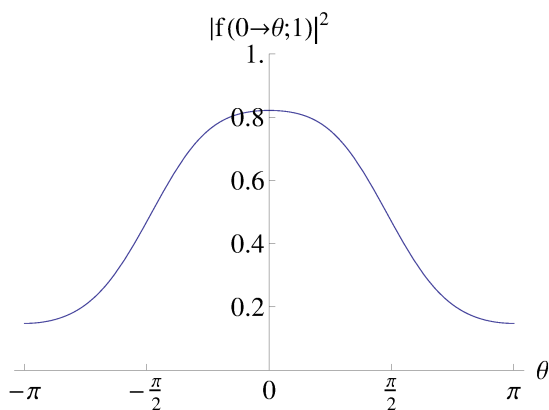
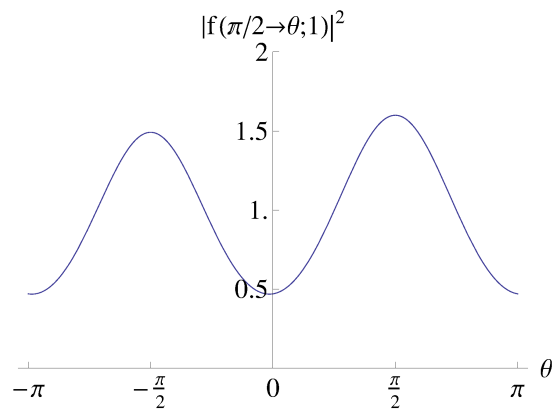
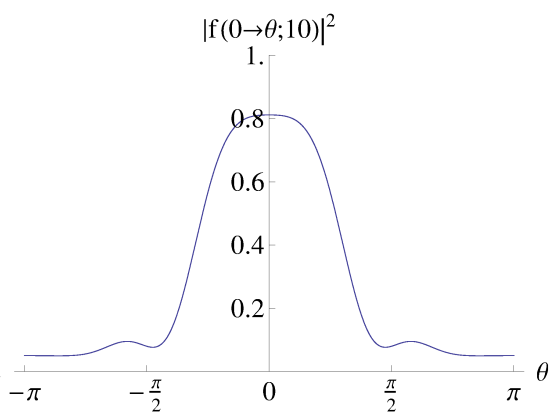
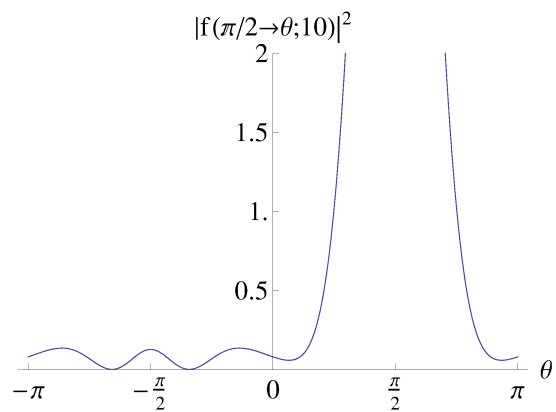
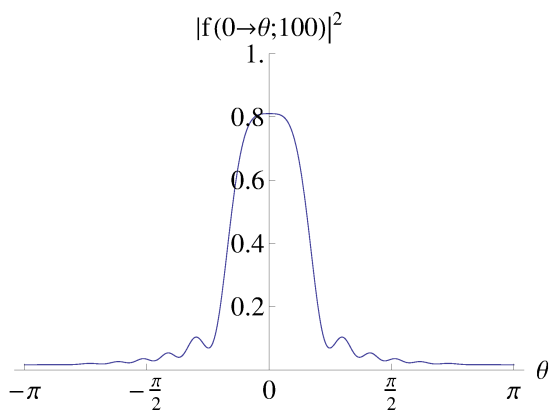
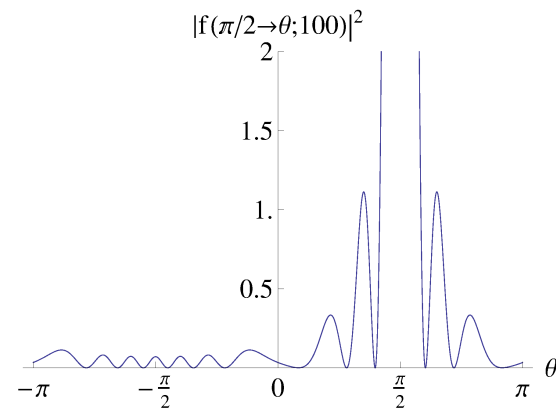
$$\begin{aligned} f(\theta' \rightarrow \theta; k^2) = & \sqrt{\frac{2}{\pi ik}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{2i\delta_{n,k}} - 1) ce_n(\theta, q) ce_n(\theta', q) \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (e^{2i\epsilon_{n,k}} - 1) se_n(\theta, q) se_n(\theta', q) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

この級数は $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \times (0, \infty)$ の任意のコンパクト集合に属する (θ, θ', k) について一様収束する.

級数 (20) に現れた係数 $e^{2i\delta_{n,k}} - 1, e^{2i\epsilon_{n,k}} - 1$ はある程度大きい n については極めて速く減衰し (n の階乗の逆数程度のオーダー), 数値計算においても有用である. さらに Mathematica には Mathieu 関数および Mathieu の固有値を任意の精度で計算する関数が組み込まれており, これを利用すれば散乱振幅の数値計算が可能となる. この計算では, Mathieu 関数を Bessel 関数の積で展開する公式 ([Mc, Chapter VIII] 参照) が重要な役割を果たす. また Mathieu 関数の Fourier 係数の計算は極めて誤差が蓄積しやすいため, 超高精度の数値計算 (有効桁数 300 桁程度) を行う必要があるが, これも Mathematica を使えば容易である.

以下, Mathematica 9.0 を用いて得られた微分散乱断面積 $|f(\theta' \rightarrow \theta; k^2)|^2$ の計算結果を紹介する. また, 高エネルギーの場合には伊藤-田村 [It-Ta] による散乱振幅の漸近公式があるため, $k^2 = 1000$ の場合に両者の比較を行う.

微分散乱断面積のグラフ

図 3: $k^2 = 1$. 入射方向 0.図 4: $k^2 = 1$. 入射方向 $\pi/2$.図 5: $k^2 = 10$. 入射方向 0.図 6: $k^2 = 10$. 入射方向 $\pi/2$.図 7: $k^2 = 100$. 入射方向 0.図 8: $k^2 = 100$. 入射方向 $\pi/2$.

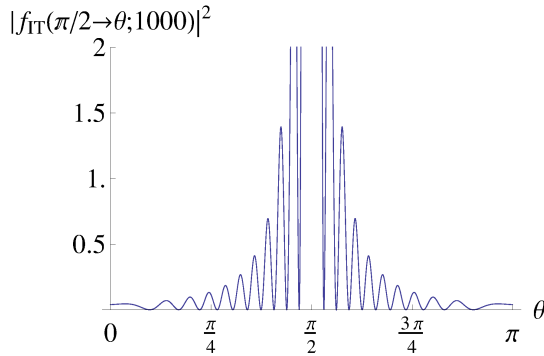
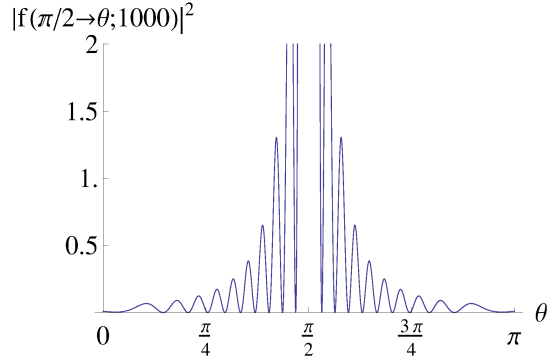
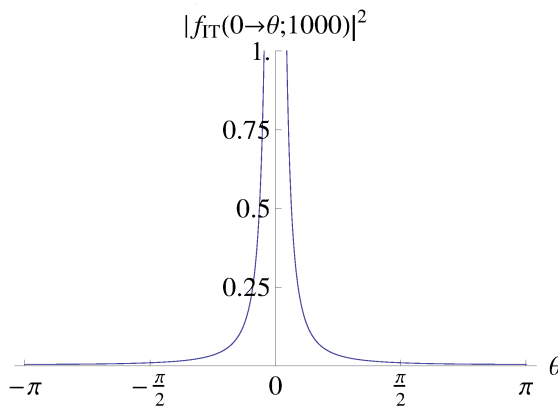
伊藤-田村の公式との比較 ($k^2 = 1000$)図 9: 伊藤-田村公式. 入射方向 $\pi/2$.図 10: 我々の結果. 入射方向 $\pi/2$.

図 11: 伊藤-田村公式. 入射方向 0.

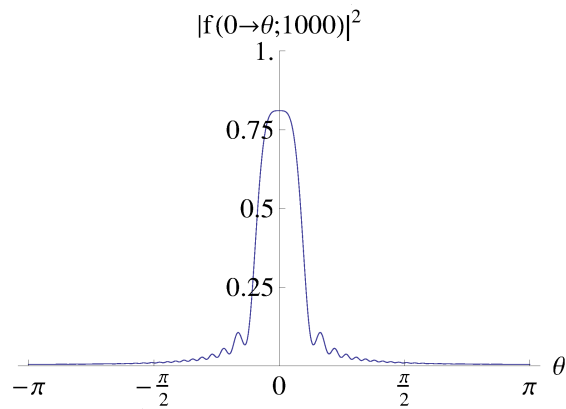


図 12: 我々の結果. 入射方向 0.

入射方向が $\pi/2$ (x_2 軸の正の方向への入射) の場合には左右のグラフは良く一致しているが, 入射方向が 0 (x_1 軸の正の方向への入射) の場合には反射方向 $\theta = 0$ の付近で左のグラフは発散し, 右のグラフでは有限となっている. 実は, $\theta = \theta' = 0$ の場合は伊藤-田村の漸近公式が成り立たない例外的な場合であることが [It-Ta] で述べられており, 左のグラフは正しくないが, このような場合にも公式 (20) は有限な結果を与える.

このように, 磁束が量子化されている場合, 散乱振幅の厳密な形は公式 (20) で与えられ, 比較的能量が小さいときには数値計算も可能であるが, 逆にエネルギーが高過ぎると数値計算に時間がかかる. 一方, 伊藤-田村の公式は任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ について散乱振幅の漸近形を与え, 高エネルギーのときには良い近似を与えるが, 低エネルギーの場合, あるいは例外的な方向には適用できない. また, 外村らによる Aharonov-Bohm 効果の検証実験 [To] では磁束を超伝導物質で作られたトーラス内に閉じ込めているが, このときには磁束の量子化条件が成り立っていることにも注意しておく.

この他, スカラー・ポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素 $H = -\Delta + V$ で条件

$$JV = V_1(\xi) + V_2(\eta), \quad J = \frac{a^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)}{2}$$

を満たすものについても, 楕円座標を用いて変数分離法で固有方程式を解くことが出来る. 特に, 電気双極子

$$V = Z_1 r_1^{-1} + Z_2 r_2^{-1}, \quad r_j = |x - F_j| \quad (j = 1, 2)$$

はこの条件を満たす. 電気双極子は 2012 年の M. Seri の学位論文 [Se] において扱われており, 共鳴極の数値計算結果が得られている.

また, Aharonov-Bohm 磁場の一般化として, ベクトル値関数 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ で条件

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(-\xi, -\eta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(\xi, \eta), \\ \mathbf{u}(\xi, \eta + 2\pi) &= \begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha & -\sin 2\pi\alpha \\ \sin 2\pi\alpha & \cos 2\pi\alpha \end{pmatrix} \mathbf{u}(\xi, \eta), \end{aligned}$$

($\alpha \in \mathbb{R}$) を満たすものを波動関数とするようなラプラシアン $-\Delta_\alpha$ を考えることもできる. $-\Delta_\alpha$ は楕円座標を被覆写像 $(\xi, \eta) \mapsto (x_1, x_2)$ とみなしたときの被覆変換群の $U(2)$ -表現から自然に導かれる twisted Laplacian と呼ばれる作用素であり, 固有関数は分数次の Mathieu 関数で表すことができる ([Mi] 参照).

3 楕円体座標

次に, 3次元空間の楕円体座標を用いて同様の議論を行う. 楕円体座標には縦長の楕円体を座標面に持つ**扁長回転楕円体座標** (長球座標, prolate spheroidal coordinate) と, 扁平な楕円体を座標面に持つ**扁平回転楕円体座標** (扁球座標, oblate spheroidal coordiante) があるが, ここでは後者を紹介する.

扁球座標は次式で定義される.

$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \xi \sin \eta \cos \phi, \\ x_2 = a \cosh \xi \sin \eta \sin \phi, \\ x_3 = a \sinh \xi \cos \eta, \end{cases}$$

$$\xi \geq 0, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad -\pi < \phi \leq \pi.$$

ただし, a は正定数である. $\sin \eta, \cos \eta$ の選び方は3次元の極座標に合わせてあり, $a \cosh \xi, a \sinh \xi$ を r に置き替えれば3次元極座標となる. 座標面は図 13 のようになる.

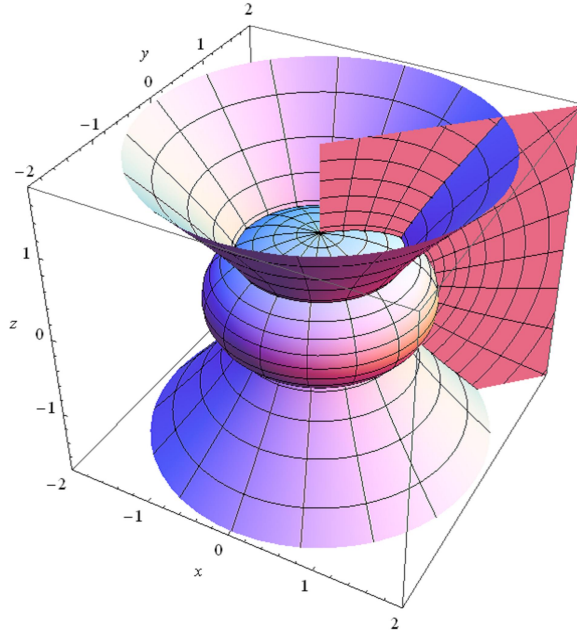


図 13: 扁平回転楕円体座標. $\xi = \text{一定}$ の曲面は扁平回転楕円体または円板, $\eta = \text{一定}$ の曲面は一葉双曲面または穴の空いた平面, $\phi = \text{一定}$ の曲面は半平面である.

扁球座標におけるラプラシアン表示は次の通りである.

$$\Delta u = \frac{1}{a^2 \cosh \xi \sin \eta (\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta)} \cdot \left(\sin \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\cosh \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \cosh \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta}{\cosh \xi \sin \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right).$$

ここで, $u = f(\xi)g(\eta) \cos m\phi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) または $u = f(\xi)g(\eta) \sin m\phi$ ($m = 1, 2, \dots$) とおけば, ラプラシアン固有方程式 $-\Delta u = \lambda u$ は次の常微分方程式に帰着される.

$$\frac{1}{\cosh \xi} \frac{d}{d\xi} \left(\cosh \xi \frac{df}{d\xi} \right) + \left(a^2 \lambda \cosh^2 \xi - \mu + \frac{m^2}{\cosh^2 \xi} \right) f = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\sin \eta} \frac{d}{d\eta} \left(\sin \eta \frac{dg}{d\eta} \right) + \left(-a^2 \lambda \sin^2 \eta + \mu - \frac{m^2}{\sin^2 \eta} \right) g = 0. \quad (22)$$

ただし, μ は分離定数である. ここで, $\lambda_{mn} = \mu - a^2 \lambda$, $c = ia\sqrt{\lambda}$ とおき, (21) において $(t, \Phi) = (i \sinh \xi, f)$, または (22) において $(t, \Phi) = (\cos \eta, g)$ の置き換えを行うと, (21), (22) のいずれも次の方程式に帰着する.

$$\frac{d}{dt} \left((1 - t^2) \frac{d\Phi}{dt} \right) + \left(\lambda_{mn} - c^2 t^2 - \frac{m^2}{1 - t^2} \right) \Phi = 0. \quad (23)$$

特に $c=0$ のとき, (23) は Legendre の陪微分方程式である.

固定された非負整数 m に対して, (23) が $t = \pm 1$ で有限な非自明解 Φ を持つような定数 λ_{mn} は高々可算個であり, Legendre 関数に合わせて $n = m, m+1, m+2, \dots$ と番号を付けることにする. そのときの解を $\Phi = \text{pe}_n^m(c, t)$ と表し, **第1種回転楕円体波動関数 (spheroidal wave function of the first kind)** と呼ぶ. 特に $c=0$ のとき, $\text{pe}_n^m(0, t)$ は Legendre 関数 $P_n^m(t)$ と一致する. 方程式は $t \rightarrow -t$ の置き替えに対して不変な形であるので, 関数 $\text{pe}_n^m(c, t)$ は偶関数または奇関数に取ることが出来る. このとき, $\text{pe}_n^m(c, t)$ と反対の偶奇性を持つ (23) の解を $\text{qe}_n^m(c, t)$ で表し, **第2種回転楕円体波動関数 (spheroidal wave function of the second kind)** と呼ぶ.

再び整合条件を考えると, $-\Delta$ の固有値 $\lambda = k^2$ に対する一般固有関数は

$$\begin{aligned} u &= \text{pe}_n(iak, i \sinh \xi) \text{pe}_n(iak, \cos \eta) \cos m\phi, \\ (n &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n), \\ u &= \text{pe}_n(iak, i \sinh \xi) \text{pe}_n(iak, \cos \eta) \sin m\phi, \\ (n &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

と表されることが分かる. この解を用いれば, 扁平回転楕円体内部での Dirichlet 境界条件下でのラプラシアン固有関数を求めることが出来る. 参考のため, 固有関数の等高面の一例を図 14 に挙げておく.

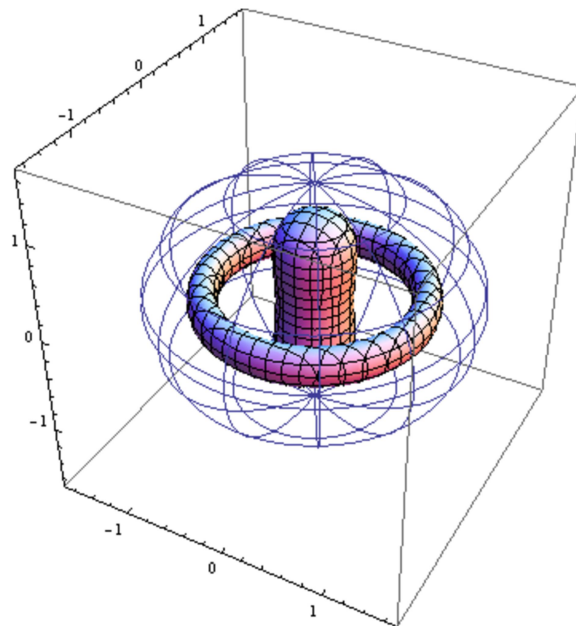


図 14: 扁平回転楕円体内部における Dirichlet 境界条件下でのラプラシアンの固有関数の等高面の一例. 固有値 16.61.

次に, 3次元空間内の無限に細い輪状のソレノイド

$$R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = a, x_3 = 0\},$$

を考え (図 15), R の内部に閉じ込められた磁場に対する Schrödinger 作用素 H を考える.

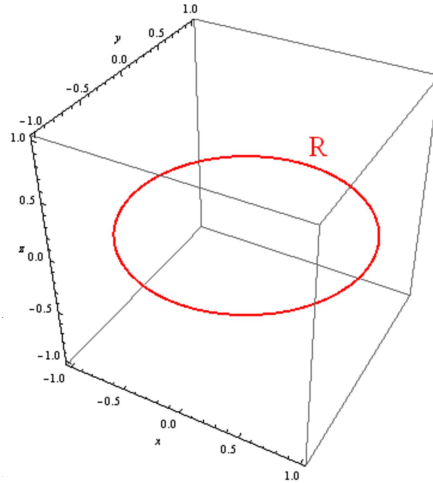


図 15: 無限に細い輪状のソレノイド R .

さらに, 磁束の量子化条件を仮定する. 2次元の場合と同様に考えれば, 適当な多価ゲージ関数 (絶対値 1 の複素数値関数) Φ による置換 $u = \Phi v$ を行うことにより, H の固有方程式はモノドロミー条件

$$Mv = -v$$

を満たす多価関数 v に対するラプラシアン固有方程式と同値となる. ただし, M は R に 1 回巻き付く閉路に沿って v の値を連続的に変化させたときのモノドロミー作用素である. このとき, H の一般固有関数は

$$\begin{aligned} u &= \Phi \cdot qe_n(iak, i \sinh \xi) pe_n(iak, \cos \eta) \cos m\phi, \\ (n &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n), \\ u &= \Phi \cdot qe_n(iak, i \sinh \xi) pe_n(iak, \cos \eta) \sin m\phi, \\ (n &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

となる. この解を用いると, 作用素 H を回転楕円体内部で考えたときの Dirichlet 固有値問題を解くことができる. 図 16 に固有関数の等高面の一例を与えておく.

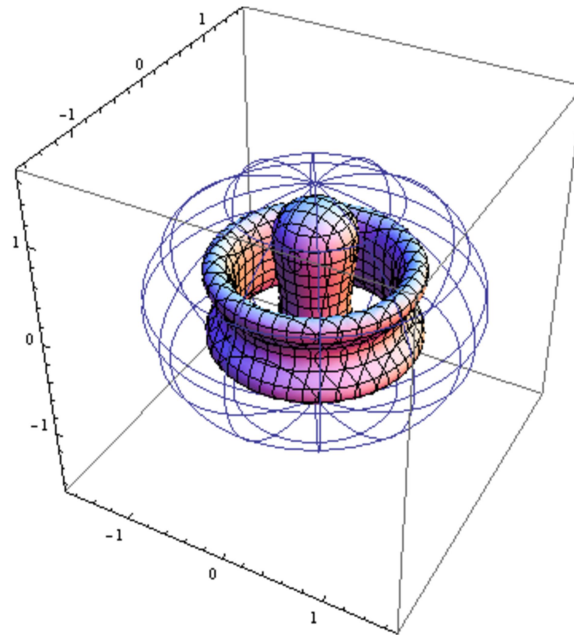


図 16: 扁平回転楕円体内, ディリクレ境界条件下での無限に細い輪状のソレノイド R に閉じ込められた磁場に対する Schrödinger 作用素の固有関数の等高面の一例. 固有値 22.22.

残る問題は散乱振幅の計算であるが, 現在のところ数値計算が完成していないため, 方針のみを示しておく.

- (i) 回転楕円体波動関数の無限遠方での漸近挙動は [Fl, 4.1.13, 4.1.20] に, 回転楕円体波動関数による平面波の展開公式は [Fl, 5.3.3] にある. したがって, 2次元の場合と同様に, 散乱振幅は自由粒子と摂動系の波動関数の位相のズレを用いて表すことが出来る.
- (ii) 数値計算には第1種・第2種回転楕円体波動関数の効率の良い計算公式が必要である. 2次元の場合の類推で考えれば, これには回転楕円体波動関数を球 Bessel 関数の積で表す公式 [Fl, 6.2.3, 6.2.4] が有用であると思われる.

しかし, 2次元の場合と比較すると公式がやや複雑であり, 現在のところグラフを効率良く描ける段階にまで至っていない. これらの技術的問題を解決し, 外村らによる Aharonov-Bohm 効果の検証結果の画像 [To, Fig.2] (超伝導体トーラスの間の干渉縞がトーラスに閉じ込められた磁場によってズレることを示したもの) を再現することが現在の目標である. 次の機会での報告を目指したい.

参考文献

- [Ah-Bo] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485–491.

- [Gu-Qi] Zhi-Yu Gu and Shang-Wu Qian, Aharonov-Bohm scattering on parallel flux lines of the same magnitude, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** (1988), 2573–2585.
- [It-Ta] H. T. Ito and H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in scattering by point-like magnetic fields at large separation, *Ann. Henri Poincaré* **2** (2001), no. 2, 309–359.
- [Fl] C. Flammer, *Spheroidal Wave Functions*, Stanford Univ. Press, 1957.
- [Ma] E. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique, *Journal de Liouville* **13** (1868), 137–203.
- [Mc] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford, at the Clarendon Press, 1947.
- [Mi] T. Mine, Solvable models in two-solenoidal Aharonov-Bohm magnetic fields on the Euclidean plane, 数理解析研究所講究録別冊 **B45**, 45–68.
- [Mo-Ud-Hi1] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信著, 岩波 数学公式 I 微分積分・平面曲線, 岩波書店, 1956.
- [Mo-Ud-Hi3] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信著, 岩波 数学公式 III 特殊函数, 岩波書店, 1960.
- [Na] Y. Nambu, The Aharonov-Bohm problem revisited, *Nuclear Phys. B* **579** (2000), no. 3, 590–616.
- [Se] M. Seri, Resonances in the two centers Coulomb system, Ph. D. Thesis, 2012.
URL: <http://opus4.kobv.de/opus4-fau/frontdoor/index/index/docId/2385>
- [St] P. Šťovíček, The Green function for the two-solenoid Aharonov-Bohm effect, *Phys. Lett. A* **142** (1989), no. 1, 5–10.
- [Ta] 竹村剛一, Heun’s differential equation and quantum physics, 数理解析研究所講究録 **1902** (2014), 102–114.
- [To] A. Tonomura et al., Evidence for Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electron Wave, *Phys. Rev. Lett.* **56**, No. 8 (1986), 792–795.