

実アーベル体の岩澤 λ 不変量について

東京大学大学院数理科学研究科・研究生・都地 崇恵 (TSUJI Takae)

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1 序

p を素数とする. 代数体 k に対して, k_∞/k で円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大を表す. つまり, k_∞ を k に 1 の p べき乗根全体 μ_{p^∞} を添加した体 $k(\mu_{p^\infty})$ の部分体で k 上の Galois 群が $\mathbb{Z}_p$ の加法群と同型になる唯一の体とする. 各 $n \geq 0$ に対し, k 上 p^n 次となる k_∞/k の中間体を k_n とする. k_n のイデアル類群の p -Sylow 部分群を $A_n(k)$ と書き,

$$A_\infty(k) := \varprojlim A_n(k)$$

とおく. ここで, 射影極限はノルムによるものとする. このとき, 次が予想されている ([6]):

Greenberg 予想 (p, k). k が総実代数体ならば $A_\infty(k)$ は位数有限であろう.

現在のところ, その正否について一般的なことは殆ど証明されていないが, 予想が成立するための (必要) 十分条件を与え, 実例でそれを確かめるという研究は多く行われている. その中, 市村-隅田 ([7, 8, 9]) は k がアーベル体で拡大次数 $[k : \mathbb{Q}]$ が p と素なとき, 予想が成り立つための必要十分条件を円単数や p 進 L 関数などを用いて簡明な形で与えている (Kraft-Schoof [11], 栗原 [12] でも同様の形の判定条件が与えられている). それは実例計算には非常に有効なものであり, 実際それを用いることで $p = 3$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})(1 < m < 10^4)$ に対して予想が正しいことが確認できている. その後, 福田-小松 [4] は, k が p 次巡回体で p が分解するとき, 市村-隅田と同様の形の判定条件を与えた.

今回は市村-隅田の結果を拡張し, 拡大次数が p で割れる場合も含めたすべての実アーベル体に適用できる判定条件を与えた.

2 主結果

記号は前節の通りとする. p は奇素数とし, k は実アーベル体で $k \cap \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q}$ を満たす, つまり導手が p^2 で割れないとする. $\Delta := \text{Gal}(k/\mathbb{Q})$, $\Gamma := \text{Gal}(k_\infty/k)$ と

すれば, $\text{Gal}(k_\infty/\mathbb{Q}) \cong \Delta \times \Gamma$ と分解でき, $A_\infty(k)$ は完備群環 $\mathbb{Z}_p[\Delta][\Gamma]$ 上の加群となる. さらに, $A_\infty(k)$ は $\mathbb{Z}_p[\Delta][\Gamma]$ 上有限生成かつ torsion であることが知られている. まず, アーベル体 k に対する Greenberg 予想は Δ の指標を用いて, $A_\infty(k)$ を分解することにより, 指標ごとの予想に帰着できることを述べる. $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 加群 M と Δ の指標 $\chi \in \hat{\Delta} := \text{Hom}(\Delta, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ に対し, M^χ を次のように定める:

$$M^\chi := \{m \in M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\chi] \mid \delta m = \chi(\delta)m \ \forall \delta \in \Delta\}.$$

ただし, $\mathbb{Z}_p[\chi]$ は $\mathbb{Z}_p$ 上 χ の値で生成される環とする. このとき, Ω を $\mathbb{Z}_p$ に Δ のすべての指標の値を添加した環とすれば, 自然な写像 $\bigoplus_{\chi \in \hat{\Delta}} M^\chi \otimes_{\mathbb{Z}_p[\chi]} \Omega \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Omega$ の核と余核は Δ の位数倍で消えることが分かる (とくに Δ の位数が p と素ならばそれらはともに自明である). よって, M が $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成ならば, それらはともに位数有限になる. $A_\infty(k)$ は Ferrero–Washington の定理 ([3]) より, 有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群になることが知られているので, k に対する Greenberg 予想は Δ のすべての指標 χ に対し, $A_\infty(k)^\chi$ が位数有限であることと同値になる. さらに, k_χ を χ に対応するアーベル体とすれば, ノルム写像 $A_\infty(k)^\chi \rightarrow A_\infty(k_\chi)^\chi$ の核と余核は有限になることがわかる. 従って, $A_\infty(k)^\chi$ の有限性はアーベル体 k には依らず, χ のみに依存する.

導手が p^2 で割れない even な Dirichlet 指標 χ を 1 つ固定し, $k = k_\chi$, $\Delta = \text{Gal}(k_\chi/\mathbb{Q})$ とする. また, $A_\infty(k_\chi)^\chi$ は単に A_∞^χ と書き, $\mathbb{Z}_p[\chi]$ は $\mathcal{O}$ で表す. 1 つ固定した Γ の位相的生成元 γ に $1+T$ を対応させることにより, 完備群環 $\mathcal{O}[\Gamma]$ とべき級数環 $\Lambda := \mathcal{O}[[T]]$ を同一視し, A_∞^χ を Λ 加群と見なす. A_∞^χ の Λ 加群としての特性多項式, λ 不変量をそれぞれ $\text{char}_\Lambda A_\infty^\chi$, λ_χ と書く. このとき, 定義より $\lambda_\chi = \deg(\text{char}_\Lambda A_\infty^\chi)$ であり, これは A_∞^χ の $\mathcal{O}$ 加群としての階数に一致する. 上でも述べたように A_∞^χ は有限生成 $\mathcal{O}$ 加群であるから, p と χ に対する Greenberg 予想は次のようになる:

Greenberg 予想 (p, χ). 導手が p^2 で割れない even な Dirichlet 指標 χ に対し,

$$\text{char}_\Lambda A_\infty^\chi = 1, \quad \text{すなわち} \quad \lambda_\chi = 0.$$

まず, Mazur–Wiles の定理 [13](岩澤主予想) より, $\text{char}_\Lambda A_\infty^\chi = 1$ は, p 進 L 関数を使った条件に言い換えられることを述べる. γ の円分指標 $\Gamma \rightarrow 1+p\mathbb{Z}_p$ による像を $1+q$ と書く. χ に対応する Kubota–Leopoldt の p 進 L 関数を $L_p(s, \chi)$ で表す. このとき, 次を満たすべき級数 $g_\chi(T) \in \mathcal{O}[[T]]$ が唯 1 つ存在することが知られている

$$g_\chi((1+q)^s - 1) = L_p(1-s, \chi)$$

([15, Theorem 7.10] 参照). さらに, Ferrero–Washington の定理と p 進 Weierstrass 準備定理より, distinguished 多項式 $P_\chi(T) \in \mathcal{O}[T]$ と Λ の単数 $u_\chi(T)$ があって,

$$g_\chi(T) = u_\chi(T)P_\chi(T)$$

と一意的に分解できる. このとき, Mazur–Wiles の定理と類体論より

$$\text{char}_\Lambda A_\infty^\chi \mid P_\chi(T)$$

が導かれる (とくに, $\lambda_\chi^* = \deg P_\chi(T)$ とおけば, $\lambda_\chi \leq \lambda_\chi^*$). 従って, $\text{char}_\Lambda A_\infty^\chi = 1$ が成立することと $P_\chi(T)$ のすべての既約因子 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対して, $P(T) \nmid \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成立することが同値であることがわかる.

そこで $P(T) \mid P_\chi(T)$ なる多項式 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ を 1 つ固定する. 本稿の目的は $P(T) \nmid \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成立するための必要十分条件を与えることである. そこで重要な役割を果たすのは市村–隅田 ([7, 8, 9]) によって導入された多項式 $X_{P,n}(T)$ で, その定義を述べる. $n \geq 0$ に対し,

$$\vartheta_n^\chi(T) = \begin{cases} (1+T)^{p^n} - 1 & (\chi(p) \neq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{(1+T)^{p^n} - 1}{T} & (\chi(p) = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく. Brumer [1] によって証明されたアーベル体に対する Leopoldt 予想から, $\Lambda/(P, \vartheta_n^\chi)$ が位数有限であることが導かれる. そこで $\Lambda/(P, \vartheta_n^\chi)$ のアーベル群としての exponent を $m_{P,n}$ とする. このとき, 次を満たす多項式 $X_{P,n}(T) \in \mathcal{O}[T]$ が ϑ_n^χ を法として一意に定まる:

$$X_{P,n}(T)P(T) \equiv m_{P,n} \pmod{\vartheta_n^\chi}.$$

$\mathcal{O}$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の基底 $\{\theta_1, \dots, \theta_s\}$ ($s = [\mathcal{O} : \mathbb{Z}_p]$) を 1 つ固定し,

$$\left(\sum_{\delta \in \Delta} \chi(\delta)^{-1} \delta \right) X_{P,n}(T) = \sum_{j=1}^s X_{P,n}^{(j)}(T) \theta_j, \quad X_{P,n}^{(j)}(T) \in \mathbb{Z}_p[\Delta][T]$$

と表す. さらに, 次を満たすように $Y_{P,n}^{(j)}(T) \in \mathbb{Z}[\Delta][T]$ を選ぶ:

$$Y_{P,n}^{(j)} \equiv X_{P,n}^{(j)} \pmod{m_{P,n}}.$$

整数 $m \geq 1$ に対し, 1 の原始 m 乗根 ζ_m を 1 つ固定する. k の導手の p と素な部分を f とおく. k_n の円単数 c_n を次のように定義する:

$$c_n = \begin{cases} N_{\mathbb{Q}(\zeta_{fp^{n+1}})/k_n} (1 - \zeta_{fp^{n+1}})^{t-1} & (f \neq 1 \text{ のとき}) \\ N_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})/k_n} \left(\frac{1 - \zeta_{p^{n+1}}}{1 - \zeta_{p^{n+1}}^b} \right)^{t-1} & (f = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで t は k の p 上の素イデアルによる剰余体の位数とし, b は $\text{mod } p^2$ の原始根とする.

主結果は次の通りである:

定理 1. $P(T) \mid P_\chi(T)$ なる多項式 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対し, 次の 2 つは同値である:

- (i) $P(T) \nmid \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi$
- (ii) ある $n \geq 0$ で, 次の条件が成立する:

$$(H_{P,n}) \quad c_n^{Y_{P,n}^{(j)}(\gamma-1)} \notin (k_n^\times)^{m_{P,n}} \quad (1 \leq j \leq s).$$

χ の位数が p で割れないとき, この結果は市村-隅田 [7, 9] の主定理に一致する.

注. 条件 $(H_{P,n})$ は $X_{P,n}, Y_{P,n}^{(j)} (1 \leq j \leq s)$ および $\mathcal{O}$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の基底の選び方には依らない.

以上より, χ に対する Greenberg 予想, つまり $\lambda_\chi = 0$ が成立することは $P_\chi(T)$ のすべての既約因子 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対し, ある $n \geq 0$ で条件 $(H_{P,n})$ が成立することと同値になることが得られたので, これを用いて Greenberg 予想の判定が行える. 実際, 多項式 $Y_{P,n}^{(j)}(T)$, 円単数 c_n および $m_{P,n}$ は計算可能な元であり, $c_n^{Y_{P,n}^{(j)}(\gamma-1)}$ が $m_{P,n}$ 乗元にならないことを確かめるには k_n の次数 1 の素イデアル $\mathfrak{L}$ を使って,

$$c_n^{Y_{P,n}^{(j)}(\gamma-1)} \bmod \mathfrak{L} \notin ((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times)^{m_{P,n}}, \quad ((l) = \mathfrak{L} \cap \mathbb{Q})$$

が成立するかを考察することが有効である. ここで, Chebotarev の密度定理を使えば, 上の条件を満たす $\mathfrak{L}$ が存在することと条件 $(H_{P,n})$ は同値であることも分かる.

$P_\chi(T)$ のある特別な因子 $P(T)$ に対しては定理における条件 $(H_{P,n})$ を実際に確かめるまでもなく, $P(T) \nmid \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成り立つことを証明した. その結果にも触れておく. ω を Teichmüller 指標とする.

$$g_\chi(q) = -(1 - \chi\omega^{-1}(p))B_{1,\chi\omega^{-1}},$$

$(B_{1,\chi\omega^{-1}}$ は一般 Bernoulli 数) である. よって, $\chi\omega^{-1}(p) \in \mu_{p^\infty}$ ならば常に $\lambda_\chi^* \geq 1$ である. このとき, 次を示した:

命題 2. $\chi\omega^{-1}(p) \in \mu_{p^\infty}$ と仮定する. $P(T) \mid P_\chi(T)$ となる多項式 $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ に対して,

$$(*) \quad \text{ord}_p(Q(q)) < \text{ord}_p(1 - \chi\omega^{-1}(p)) \quad (Q(T) = P_\chi(T)/P(T))$$

ならば, $P(T) \nmid \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ が成り立つ. とくに, $P_\chi(T)$ は (*) を満たすので

$$\lambda_\chi \leq \lambda_\chi^* - 1$$

が成立する.

$\chi\omega^{-1}(p) = 1$ のとき, q が $P_\chi(T)$ の単根であること ([2, Proposition 2]) と命題 2 より, 次が得られる:

$$T - q \mid P_\chi(T), \quad T - q \nmid \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi.$$

この主張は, χ の位数が p で割れないときには, すでに市村-隅田 ([8, Remark 5]) によって証明されている.

$\chi\omega^{-1}(p) \in \mu_{p^\infty}$ かつ $\chi\omega^{-1}(p) \neq 1$ のとき, 命題 2 における条件 (*) は次が成立することと同値であることに注意しておく:

$$v_{\mathcal{O}}(P(q)) > v_{\mathcal{O}}(B_{1, \chi\omega^{-1}})$$

3 証明について

k_n の整数環を O_n で表し, $(O_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times$ の p 進完備化を $\mathcal{U}_n$ とおく. 埋め込み $k_n^\times \hookrightarrow (k_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)^\times$ による k_n の単数群の像を E_n とおき, $E_n \cap \mathcal{U}_n$ の閉包を $\mathcal{E}_n$ で表す. それぞれのノルムによる射影極限を

$$\mathcal{U} := \varprojlim \mathcal{U}_n, \quad \mathcal{E} := \varprojlim \mathcal{E}_n$$

と書く. このとき, $\mathcal{U}$ と $\mathcal{E}$ は $\mathbb{Z}_p[\Delta][[\Gamma]]$ 加群であるから, Λ 加群 $\mathcal{U}^\chi$ と $\mathcal{E}^\chi$ が定まる. Mazur-Wiles の定理と類体論より,

$$\text{char}_\Lambda(\mathcal{U}^\chi/\mathcal{E}^\chi) \cdot \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi = P_\chi(T)$$

が導かれる. そこで, $P(T) \in \mathcal{O}[T]$ を $P_\chi(T)$ の因子としたとき, 条件 $P(T) \nmid \text{char}_\Lambda A_\infty^\chi$ は $\text{char}_\Lambda(\mathcal{U}^\chi/\mathcal{E}^\chi) \nmid (P_\chi(T)/P(T))$ と書き直せることがわかる. この条件を $\mathcal{E}^\chi$ の生成元, つまり $k_n (n \geq 0)$ の基本単数を用いて書き直すのではなく, その中の具体的に扱える円単数 $(\prod_{\delta \in \Delta} c_n^{(\delta^{-1})\delta})_{n \geq 0} \in \mathcal{E}^\chi$ で生成される部分加群 $\mathcal{C}^\chi$ を考察することで, 基本単数には依らない条件 $(H_{P,n})$ に書き換えられることを証明する. $\mathcal{U}^\chi/\mathcal{C}^\chi$ の Λ 構造は $P_\chi(T)$ を用いて表わせることが, k の拡大次数が p で割れないときには, 岩澤 [10], Gillard [5] によって証明されており, 市村-隅田 [7, 9] ではそれが証明の重要な役割を果たしていた. 市村-隅田の結果において k の拡大次数が p で割れないと仮定した一番大きな理由はこの岩澤, Gillard の結果がそ

の仮定の下でしか証明されていなかったことである. [14] では次数が p で割れる場合も含めたすべてのアーベル体 k に対し, $\mathcal{U}^x/\mathcal{C}^x$ の構造を決定したので, この結果を用いることで市村-隅田の結果の拡張となる定理 1 が得られた. 命題 2 は, $\chi\omega^{-1}(p) \in \mu_{p^\infty}$ のとき, $\mathcal{U}_n^x (n \geq 0)$ の $\mathbb{Z}_p$ -torsion 部分が自明でないことを使って証明する.

参考文献

- [1] A. Brumer, *On the units of algebraic number fields*, Mathematika **14** (1967) 121–124.
- [2] B. Ferrero and R. Greenberg, *On the behavior of p -adic L -functions at $s = 0$* , Invent. math. **50** (1978) 91–102.
- [3] B. Ferrero and L. C. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math. (2) **109** (1979) 377–395.
- [4] T. Fukuda and K. Komatsu, *Ichimura-Sumida criterion for Iwasawa λ -invariants*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **76** (2000) 111–115.
- [5] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979) 1–15.
- [6] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976) 263–284.
- [7] H. Ichimura and H. Sumida, *On the Iwasawa invariants of certain real abelian fields*, Tôhoku Math. J. **49** (1997) 203–215.
- [8] H. Ichimura and H. Sumida, *On the Iwasawa λ -invariant of the p -cyclotomic field*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **3** (1996) 457–470.
- [9] H. Ichimura and H. Sumida, *On the Iwasawa invariants of certain real abelian fields II*, Internat. J. Math. **7** (1996) 721–744.
- [10] K. Iwasawa, *On some modules in the theory of cyclotomic fields*, J. Math. Soc. Japan **16** (1964) 42–82.
- [11] J. Kraft and R. Schoof, *Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields*, Compositio Math. **97** (1995) 135–155.

- [12] M. Kurihara, *The Iwasawa λ -invariants of real abelian fields and the cyclotomic elements*, Tokyo J. Math. **22** (1999) 259–277.
- [13] B. Mazur and A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$* , Invent. math. **76** (1984) 179–330.
- [14] T. Tsuji, *Semi-local units modulo cyclotomic units*, J. Number Theory **78** (1999) 1–26.
- [15] L. C. Washington, *“Introduction to Cyclotomic Fields”*, Grad. Texts in Math. 83, Springer-Verlag 1982.

E-mail : `ttsuji@ms.u-tokyo.ac.jp`