

Kazhdan-Lusztig conjecture

for Kac-Moody Lie algebras

京大数理研 柏原正樹 (M. Kashiwara)

広島大理 谷崎俊之 (T. Tanisaki)

30. 序

(有限次元半単純リー代数の) 最高ウェイト表現の研究は、D. N. Verma によりはじめられ、70年代に入ると Bernstein-Gelfand-Gelfand や Janzen による純代数的手法を用いた精力的な研究が行われた。その主な目標は、既約な最高ウェイト表現の指標を求めることである。だが、これに際しては、1980年前後に入るとより新しく進展がもたらされた。まず Kazhdan-Lusztig [KL1] は、いわゆる Kazhdan-Lusztig 多項式を定義し、これを用いて指標の具体的な形を予想した (Kazhdan-Lusztig 予想)。続いて Beilinson-Bernstein [BB] および Brylinski-柏原 [BK] は、旗多様上の D 表現を用いることにより、この予想を独立に証明した。既約

そこで今度は、Kac-Moody リー代数の最高ウェイト表現の

指標がどうなるかが問題となる。有限次元半単純リー代数の場合の指標公式の自然な拡張として、次の2つの場合を包摂が考えられる。

(1) 最高ウェイトが支配的ウェイトと Weyl 群共役な場合。

(2) 最高ウェイトが反支配的ウェイトと Weyl 群共役な場合。

一般の無限次元 Kac-Moody リー代数では、支配的ウェイトと反支配的ウェイトは Weyl 群共役ではないので、(1) と (2) は全く別な包摂を与える。

(1) については、柏原(谷崎) [K2], [KT1] (および Casian [C1]) により、対称化可能 Kac-Moody リー代数に対して成立することが示された。また (2) は、アフィンリー代数については正しいことが、柏原-谷崎 [KT3] (および Casian [C2]) により証明された。なお、(2) は一般の Kac-Moody リー代数では成立せず、アフィンリー代数 (あるいは有限次元半単純リー代数) に限り必要がある。

本稿では、[K2], [KT1], [KT3] の結果を中心にその解説を行なう。なお、本文の文書は谷崎にあることを付言しておく。

§1. 指標公式

1.0 記号の準備

$\mathfrak{g}$ は Kac-Moody リー代数, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数, $\{d_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{h}^+ \ni$ 単純ルート系, $\{h_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{h} \ni$ 単純余ルート系とし, $\Delta \ni$ ルート系, $\Delta^+ \ni$ 正ルート系とする. また, 各 $\alpha \in \Delta$ に対して, 対応するルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ で表す. $i=1, \dots, n$ に対して, $e_i \in \mathfrak{g}_{d_i}$, $f_i \in \mathfrak{g}_{-d_i} \ni [e_i, f_i] = h_i$ と仮定する. $\mathfrak{g}$ の部分代数は

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^+ &= \langle e_1, \dots, e_n \rangle, & \mathfrak{n}^- &= \langle f_1, \dots, f_n \rangle \\ \mathfrak{b}^+ &= \langle e_1, \dots, e_n, \mathfrak{h} \rangle, & \mathfrak{b}^- &= \langle f_1, \dots, f_n, \mathfrak{h} \rangle \end{aligned}$$

で定めるとき,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \quad \mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm$$

$$\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^\pm} \mathfrak{g}_{\pm \alpha}$$

が成立する. また $W \subset GL(\mathfrak{h}^+)$ は Weyl 群とする. また $i=1, \dots, n$ に対して, $s_i \in GL(\mathfrak{h}^+)$ は

$$s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i) d_i \quad (\lambda \in \mathfrak{h}^+)$$

により定め, $W = \langle s_i \rangle_{i=1}^n$ とする. $S = \{s_i\}_{i=1}^n$ とおくと, (W, S) は Coxeter 群になる. 従って, 各 $w \in W$ に対して $\mathbb{Z}$ の長 $l(w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が定まる. また, W 上の Bruhat 順序 $\leq$ により表す.

1.1 問題の説明

$\lambda \in \mathfrak{g}^+$ に対して, $\mathfrak{g}$ 加群 $M(\lambda)$ を次で定める:

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) / \left(\sum_{h \in \mathfrak{g}} U(\mathfrak{g}) (h - \lambda(h)1) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{m}^+ \right)$$

$$\cong U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}_\lambda.$$

ここで $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の包絡代数を表す. また $\mathbb{C}_\lambda$ は

$$\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C} N_\lambda, \quad h \cdot N_\lambda = \lambda(h) N_\lambda \quad (h \in \mathfrak{g}), \quad e_i \cdot N_\lambda = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

により定まる 1次元 $\mathfrak{g}$ 加群である. $M(\lambda)$ はただ 1つの極大真部分加群 $K(\lambda)$ を含む. 従って, $L(\lambda)$ は商加群

$$L(\lambda) = M(\lambda) / K(\lambda)$$

は既約 $\mathfrak{g}$ 加群になる. $M(\lambda)$ は最高ウェイト λ の Verma 加群,

$L(\lambda)$ は最高ウェイト λ の既約加群と呼ばれる.

一般に $\mathfrak{g}$ 加群 M と $\mu \in \mathfrak{g}^+$ に対して,

$$M_\mu = \{ m \in M \mid \forall h \in \mathfrak{g}, \exists N \text{ s.t. } (h - \mu(h)1) \cdot m^N = 0 \}$$

と置く. $\mathfrak{g}$ 加群 M に対して, $M = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{g}^+} M_\mu$ かつ $\dim M_\mu < \infty$

($\forall \mu \in \mathfrak{g}^+$) を満たす M を一般ウェイト加群と呼び, M の

指標 $\text{ch}(M)$ は形式的無限和

$$\text{ch}(M) = \sum_{\mu \in \mathfrak{g}^+} (\dim M_\mu) e^\mu$$

と定める。 $M(\lambda), L(\lambda)$ は一般リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現 λ の指標を考へることが出来る。

「命題 1.1.1 $\lambda \in \mathfrak{g}^+$ に対して

$$\text{ch}(M(\lambda)) = \frac{e^\lambda}{\prod_{d \in \Delta^+} (1 - e^{-d})^{\dim \mathfrak{g}_d}}.$$

ただし、 $\sum \alpha_i \lambda_i$ は $e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 + \lambda_2}$ をみたすものとし、

$\frac{1}{1 - e^{-d}}$ は $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-id}$ と解釈する。 命題 1.1.1 は、 $M(\lambda)$

が $U(\mathfrak{g})$ の表現として 階数 1 の 自由表現であることから簡単に従う。

「命題 1.1.2 (Verma) $\text{ch}(L(\lambda))$ は次の通り。

以下 $\mathfrak{g}^+$ の基底 P であって、

$$\langle P, R_i \rangle \subset \mathbb{Z}, \quad d_i \in P \quad (i=1, \dots, m)$$

をみたすもの $\lambda \in \mathfrak{g}^+$ を固定し、 $\lambda \in P$ の場合には命題を考へることにする。

この命題の解答として知られてゐるのは、Weyl-Kac の指標公式であるが、このように説明しよう。

$\rho \in \mathfrak{g}^+$ であつて、 $\rho(R_i) = 1 \quad (i=1, \dots, m)$ をみたすものを

ととり、固定する。

$$P^+ = \{ \lambda \in P \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i=1, \dots, n) \}$$

$$= \{ \lambda \in P \mid (\lambda + \rho)(h_i) \in \mathbb{Z}_{> 0} \quad (i=1, \dots, n) \}$$

$$P^- = \{ \lambda \in P \mid (\lambda + \rho)(h_i) \in \mathbb{Z}_{< 0} \quad (i=1, \dots, n) \}$$

とある。

「定理 1.1.3 (Weyl-Kac の指標公式)

$\lambda \in P^+$ かつ

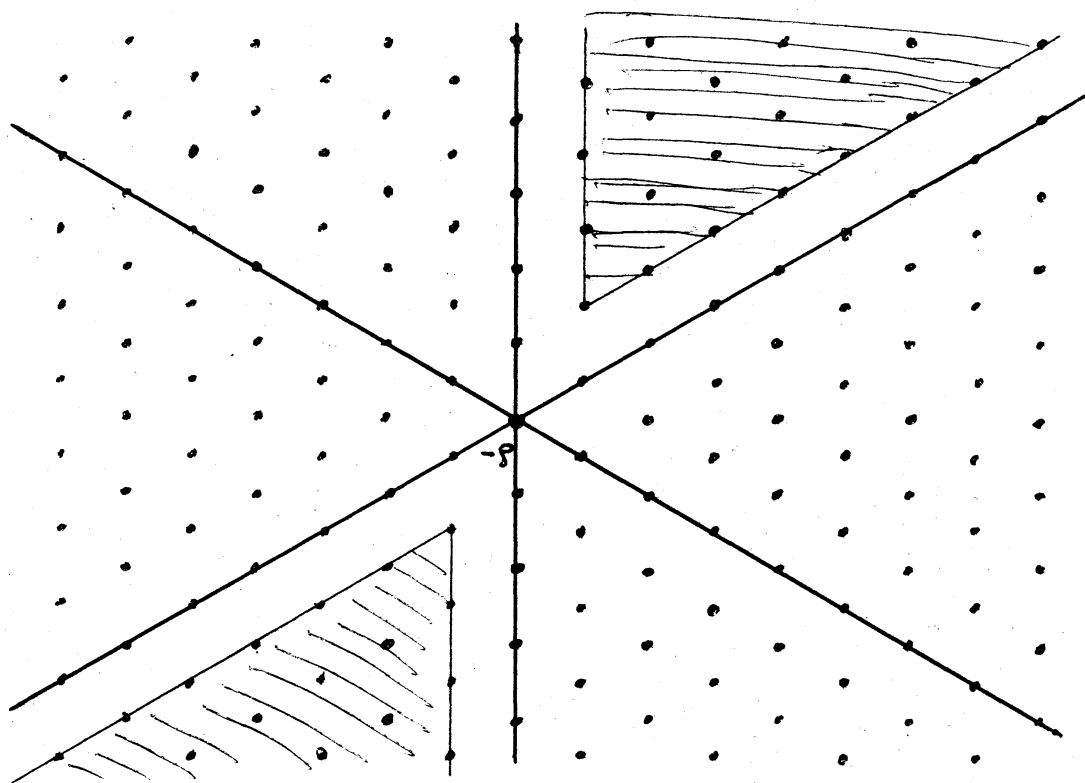
$$\text{ch}(L(\lambda)) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \text{ch}(M(w(\lambda + \rho) - \rho)) \quad \square$$

この公式にみえるように、以下 Weyl 群 W の $\mathfrak{g}^+$ への作用で
原点 $\in -\rho$ にずらしたものの和に等しくなる。そこで記号を
簡略化するために、

$$w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho \quad (w \in W, \lambda \in \mathfrak{g}^+)$$

と書く。

A_2 型の場合に給与が ϵ と ϵ 、次のようにある。



(壁)

この図で、3本の直線(壁)により分けられて生成される群が、Weyl 群 $\alpha - \rho$ だけ作用する作用を与える。• P の点,  中の P の点の全体が P^+ ,  中の P の点の全体が P^- である。

壁の Γ にある P の点の全体 E

$$P_{\text{sing}} = \{ \lambda \in P \mid \lambda(\alpha_i) = 0 \quad (\exists i=1, \dots, m) \}$$

とし、 $P_{\text{reg}} = P - P_{\text{sing}}$ とおく。 P^+, P^- は共に W の P_{reg} の (与えた) 作用に関する完全代表系を与えていた。

1.2 有限次元半単純 $\mathfrak{g}$ -代数 $\mathfrak{g}$ の場合

まず $\mathfrak{g}$ が有限次元 $\mathfrak{g}$ の場合を考える。

$\lambda \in P_{\text{sing}}$ $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ $L(\lambda)$ の指標は, $\lambda \in P_{\text{reg}}$ $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ のある種の指標として得られることは知られており (translation principle). 従って, $\lambda \in P_{\text{reg}}$ の場合を考えることにする。

「命題 1.2.1 $\text{rank } \mathfrak{g} = n \leq 2$ とする。

$\lambda \in P^-$, $w \in W$ $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\left(\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} \text{ch}(M(y \circ \lambda)) \right) \dots \textcircled{1}$$

$$\left(\text{ch}(M(w \circ \lambda)) = \sum_{y \leq w} \text{ch}(L(y \circ \lambda)) \right) \dots \textcircled{2}$$

$\lambda \in P^+$, $w \in W$ $\alpha \in \mathfrak{h}^*$,

$$\left(\text{ch}(L(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geq w} (-1)^{\ell(y) - \ell(w)} \text{ch}(M(y \circ \lambda)) \right) \dots \textcircled{3}$$

$$\left(\text{ch}(M(w \circ \lambda)) = \sum_{y \geq w} \text{ch}(L(y \circ \lambda)) \right) \dots \textcircled{4}$$

ここで $\text{ch} = 1$ とする。

① と ② は等しい

$$\sum_{y \leq x \leq w} (-1)^{\ell(x) - \ell(y)} = \delta_{y,w} \quad (y \leq w)$$

この同値は容易である。また, W の最長元 w_0 とすると,

$w_0 \circ P^- = P^+ \ni y \leq w \iff y w_0 \leq w w_0$ により, ③, ④ は

これと①, ② と同値である。よって①~④はすべて同値な関係である。

Verma の最初の期待は、これが一般の有限次元半単純リー代数について成立するのではなにかということであつたが、実は、 $\text{rank } \mathfrak{g} > 2$ のときには、④に 1 より大きな数が入ることがあり、③が単純ではなかつた。④の部分からなる Kazhdan-Lusztig 多項式を導きだすといふのが、Kazhdan-Lusztig 予想である。これを証明するために Kazhdan-Lusztig 多項式の定義を説明する。

1.3 Kazhdan-Lusztig 多項式

一般に (W, S) を Coxeter 系とする。 $\{T_w\}_{w \in W}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}[\vartheta, \vartheta^{-1}]$ の群

$$H(W) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[\vartheta, \vartheta^{-1}] T_w$$

上の結合代数の構造が、

$$\begin{cases} T_{w_1} T_{w_2} = T_{w_1 w_2} & (\ell(w_1) + \ell(w_2) = \ell(w_1 w_2)) \\ (T_s + 1)(T_s - \vartheta) = 0 & (s \in S) \end{cases}$$

により一意的に定まる ($T_e = 1$)。これを (W, S) の Hecke-岩田代数と呼ぶ。

「命題 1.3.1 (Kazhdan-Lusztig [KL1])

各 $w \in W$ に対し,

$$C_w = \sum_{y \leq w} P_{y,w}(\vartheta) T_y \in H(W) \quad (P_{y,w}(\vartheta) \in \mathbb{Z}[\vartheta])$$

であらう, 以下の条件を満たす ϑ が一意に定まる.

(a) $P_{w,w}(\vartheta) = 1$

(b) $y < w$ かつ $P_{y,w}(\vartheta) \in \mathbb{Z}[\vartheta^{-\frac{1}{2}}] \vartheta^{\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(y)-1)} \cap \mathbb{Z}[\vartheta]$

(c) $C_w = \vartheta^{+\ell(w)} \sum_{y \leq w} P_{y,w}(\vartheta^{-1}) T_{y^{-1}}$ 」

$P_{y,w}(\vartheta) \in \mathbb{Z}[\vartheta]$ の Kazhdan-Lusztig 多項式と呼ぶ. $|S| \leq 2$ ならば, 常に $P_{y,w}(\vartheta) = 1$ となる.

1.4 有限次元半単純リ-代数の場合 (続)

再び, §1.3 の設定に戻す. 問題は命題 1.2.1. の $\square$ の部分であらうが, 答えは次のとおり

「定理 1.4.1 (Kazhdan-Lusztig 予想 [KL1]; Beilinson-Bernstein [BB], Brylinski-植原 [BK]).

$\mathfrak{g}$ を有限次元半単純リ-代数とする.

$\lambda \in P^-, w \in W$ のとき

$$\begin{cases} \text{ch}(L(w \cdot \lambda)) = \sum_{y \leq w} (-1)^{l(w) - l(y)} P_{y, w}(1) \text{ch}(M(y \cdot \lambda)) \dots \textcircled{1}' \\ \text{ch}(M(w \cdot \lambda)) = \sum_{y \leq w} P_{w w_0, y w_0}(1) \text{ch}(L(y \cdot \lambda)) \dots \textcircled{2}' \end{cases}$$

$\lambda \in P^+, w \in W$ のとき

$$\begin{cases} \text{ch}(L(w \cdot \lambda)) = \sum_{y \leq w} (-1)^{l(y) - l(w)} P_{y w_0, w w_0}(1) \text{ch}(M(y \cdot \lambda)) \dots \textcircled{3}' \\ \text{ch}(M(w \cdot \lambda)) = \sum_{y \geq w} P_{w, y}(1) \text{ch}(L(y \cdot \lambda)) \dots \textcircled{4}' \end{cases}$$

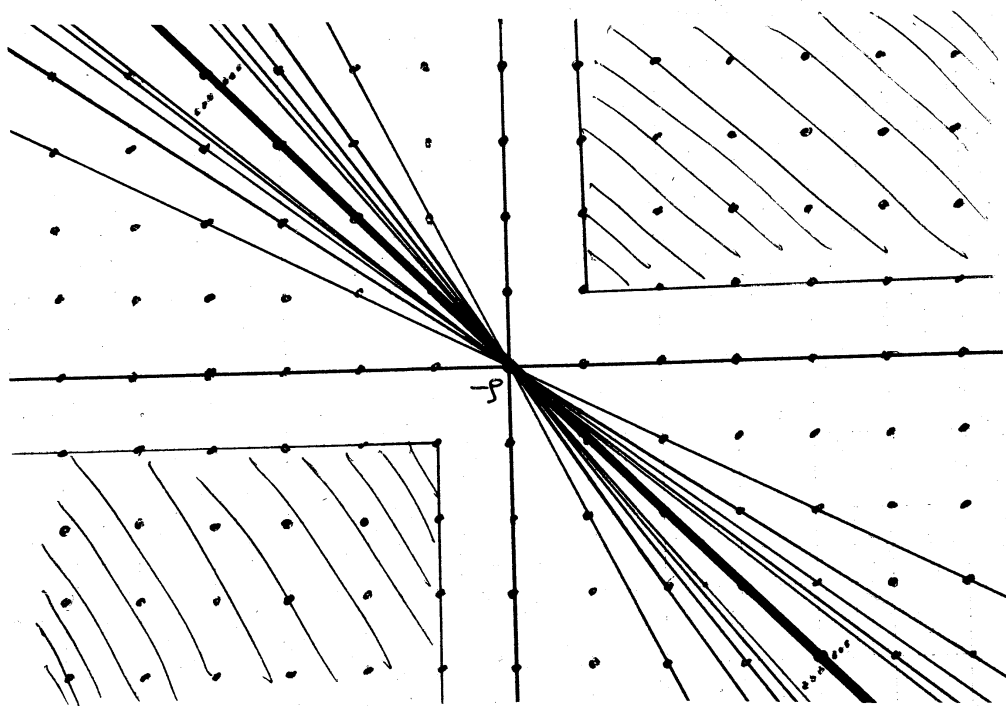
①' と ②' は 6.3 ([KL1])

$$\sum_{y \leq x \leq w} (-1)^{l(x) - l(y)} P_{y, x}(s) P_{w w_0, x w_0}(s) = \delta_{y, w} \quad (y \leq w)$$

この関係式が成り立つ。また命題 1.2.1 の場合と同じ理由により、③'、④' はそれぞれ ①'、②' と同値である。従って、やはり、①' ~ ④' はすべて同値な式である。

1.5 Kac-Moody リー代数の場合

次に、一般の Kac-Moody リー代数の場合への拡張を考える。最も簡単な $A_1^{(1)}$ の場合には $P \supset A_2$ と同様の結果が成り立つ。



壁が無数にあるので全部は書けないうえ、

$$y = -\frac{n-1}{n}x, y = -\frac{n+1}{n}x \quad (n=1, 2, 3, \dots), x=0$$

が Weyl 群のあり返しに因る壁で、他に $\pm a$ 極限として a (別 a 意味 a) 壁 $y = -x$ がある。 P^+ (あるいは P^-) の点から出発して Weyl 群の元を作用させると、壁をひとつひとつ越えて隣りの領域には移れるが、どこまで行っても真中の $y = -x$ の壁 $y = -x$ を乗り越えることはできない。これは Weyl 群が無限群で最長元 w_0 が存在しないことに起因する。

そこで、定理 1.4.1 を一般の Kac-Moody $\mathfrak{g}$ 代数に拡張することを目指す。 w_0 が存在しないので、そのまま拡張できるのは、定理 1.4.1 を含む $\textcircled{1}'$ と $\textcircled{4}'$ である。 また Γ に

この理由により, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}'$ は一般の Kac-Moody リー代数では別の主張になる。

「定理 1.5.1 (柏原-各崎) [K2], [KT1], Casian [C1])

$\mathfrak{g}$ は対称化可能な Kac-Moody リー代数 とする。

$\lambda \in P^+$, $w \in W$ に対して

$$\text{ch}(M(w \cdot \lambda)) = \sum_{y \leq w} P_{w,y}(1) \text{ch}(L(y \cdot \lambda)) \quad \text{J}$$

「定理 1.5.2 (柏原-各崎) [KT3], Casian [C2])

$\mathfrak{g}$ はアフィン・リー代数 とする。

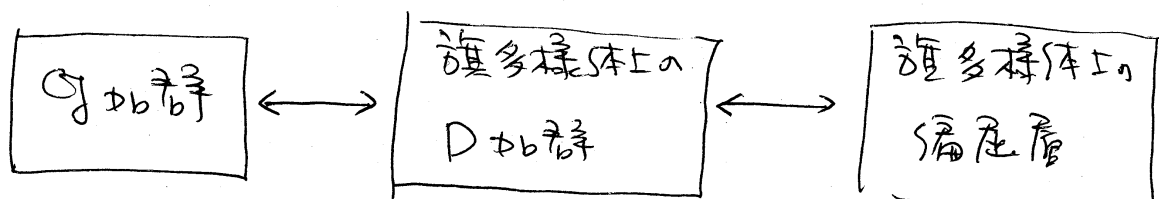
$\lambda \in P^+$, $w \in W$ に対して

$$\text{ch}(L(w \cdot \lambda)) = \sum_{y \leq w} (-1)^{\ell(w) - \ell(y)} P_{y,w}(1) \text{ch}(M(y \cdot \lambda)) \quad \text{J}$$

なお, 定理 1.5.1 の場合の $\text{ch}(L(w \cdot \lambda))$ および 定理 1.5.2 の場合の $\text{ch}(M(w \cdot \lambda))$ に関することは Kazhdan-Lusztig 多項式を用いて書けるが, ここでは省略する。

§2. 旗多様体上の D 加群

2.0 本節では, 定理 1.4.1, 定理 1.5.1, 定理 1.5.2 の証明の方向について述べる. 考え方はどれも同じで, 次の対応関係:



により, 問題を Schubert 多様体の交差コホモロジー群の計算に帰着させる.

2.1 定理 1.4.1 の証明について

$\mathfrak{g}$ は有限次元半単純リー代数とあり, $\mathfrak{g}$ に対応する連結な群 G とし, B^+, B^- はそれぞれ $\mathfrak{b}^+, \mathfrak{b}^-$ に対応する G の部分群とする. このとき, $X = G/B^-$ は G の旗多様体と呼ばれる. 一般に滑らかな群多様体 Y に対して, Y の構造層 $\mathcal{O}_Y$, Y 上の微分作用素の層 $D_Y \subset \text{End}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y)$ がある. 旗多様体 X には G が作用しているから, 何かしら環準同型

$$U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Gamma(X; D_X) \quad (a \in \mathfrak{g} \mapsto \partial_a)$$

が,

$$(\partial_a f)(x) = \frac{d}{dt} f(\exp(-ta)x) \Big|_{t=0} \quad (a \in \mathfrak{g}, f \in \mathcal{O}_X, x \in X)$$

により定まる. 従って $(\mathbb{L})D_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ 加群 $\Gamma(X; \mathcal{M})$ が定まる. また $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ 加群 M に対して D_X 加群 $D_X \otimes_{\mathbb{U}(\mathfrak{g})} M$ が定まる.

「定理 2.1.1 (Beilinson-Bernstein [BB])

次の図同値が成立する.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{U}(\mathfrak{g}) \text{ 加群 として,} \\ \text{1次元の自明な加群と} \\ \text{同じ中心指標をもつもの} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{L})D_X \text{ 加群 として,} \\ \mathbb{O}_X \text{ 加群 として} \\ \text{等直接的なもの} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & D_X \otimes_{\mathbb{U}(\mathfrak{g})} M \\ \Gamma(X; \mathcal{M}) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{M} \end{array}$$

なお, [BK] においては, このより強い形の図同値が示されている.

$w \in W$ に対して, $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ 加群 $M(w \circ 0)$, $L(w \circ 0)$ は 1次元の自明な $\mathfrak{g}$ 加群と 同じ中心指標をもつもので, これらに対して D_X 加群

$$\mathcal{M}_w = D_X \otimes_{\mathbb{U}(\mathfrak{g})} M(w \circ 0)$$

$$\mathcal{L}_w = D_X \otimes_{\mathbb{U}(\mathfrak{g})} L(w \circ 0)$$

が定まる.

このとき, 定理 1.4.1 の $\oplus'$ は ($\lambda=0$ のときに) 証明するには,
左 D_X 加群 α の Grothendieck 群における等式

$$[\mu_w] = \sum_{y \leq w} P_{w,y}(1) [\mu_y]$$

を示せばよい. そのためには, μ_w, μ_y がどのような D_X 加群であるかを考える必要がある. $w \in W$ に対して

$$X^w = B^+ w B^- / B^- \subset X$$

とおく. このとき, 次のことが知られている.

命題 2.1.2

(i) X^w は X の局所閉部分多様体.

(ii) $X = \bigsqcup_{w \in W} X^w.$

(iii) $X^w \simeq \mathbb{C}^{\dim X - l(w)},$

(iv) $\overline{X^w} = \bigsqcup_{y \leq w} X^y.$

$$\bar{X} = \bar{X}^e,$$

定理 2.1.3 ([BB], [BK]) $w \in W$ とすると

$$\mu_w = (\mathcal{H}_{X^w}^{l(w)}(\mathcal{O}_X))^*, \quad L_w = \text{Image}(\mu_w \rightarrow \mu_w^+)$$

ここで, $\mathcal{H}_{X^w}^{l(w)}$ は X^w に $\mathfrak{g}$ をもつ $l(w)$ 次の局所 $\mathcal{O}$ モーディー層 $\mathfrak{g}$ をもつ層である. $\mathcal{O}_X$ は自然に左 D_X 加群である. $\mathcal{H}_{X^w}^{l(w)}(\mathcal{O}_X)$ も自然に D_X 加群に属するが, さらにこれは正則ホムノミ -1 左 D_X 加群に属する. (正則) ホムノミ -1 左 D_X 加群の圏では, 双対層 $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^+$ を,

$$\mathcal{M}^+ = \text{Ext}_{D_X}^{\dim X}(\mathcal{M}, D_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^+$$

により定まる. 従って $\mathcal{M}_w$ も正則ホムノミ -1 左 D_X 加群である.

また $\mathcal{M}_w, \mathcal{M}_w^+$ が正則ホムノミ -1 左 D_X 加群となる, $\mathcal{L}_w$ も正則ホムノミ -1 左 D_X 加群である. $\partial X^w = \overline{X^w} - X^w$ とおくと,
 $\mathcal{M}_w|_{X - \partial X^w} \cong \mathcal{L}_w|_{X - \partial X^w}$ であり, これは X^w に $\mathfrak{g}$ をもつ $\mathbb{C}^n$ の微分方程式に属する.

一般に $Y \in \mathbb{C}^n$ の滑らかな代数多様体とすると, 正則ホムノミ -1 左 D_Y 加群の圏と Y 上の偏屈層の圏の反同値

$$\text{Sol} : \{ \text{正則ホムノミ } -1 \text{ 左 } D_Y \text{ 加群} \} \rightarrow \{ Y \text{ 上の偏屈層} \}$$

が

$$\text{Sol}(\mathcal{M}) = \text{RHom}_{D_Y}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y)$$

(Riemann-Hilbert 対応)

により定まる. 従って, 我々が考える問題は, D 加群の問題からさらに偏屈層の問題に翻訳できる. Riemann-Hilbert

対応の一般論により

$$\text{Sol}(\mu_w) = (\mathbb{C}_{X^w}[-l(w)])^*, \quad \text{Sol}(L_w) = {}^\pi \mathbb{C}_{X^w}[-l(w)]$$

従って, 定理 1.4.1 の ④' で $\lambda=0$ の場合, 主張はこれから従う.

「定理 2.1.4 ([KL2]) 偏屈層 a の Grthendieck 群において,

$$[\mathbb{C}_{X^w}[-l(w)]] = \sum_{y \geq w} P_{w,y}(1) [{}^\pi \mathbb{C}_{X^y}[-l(y)]]$$

$$([\mathbb{C}_{X^w}[-l(w)]] = [(\mathbb{C}_{X^w}[-l(w)])^*]) \text{ に注意) } \quad \square$$

この定理は定理 1.4.1 の証明以前に知られていたものである.

定理 1.4.1 で λ が一般の場合, translation principle により, $\lambda=0$ の場合に戻すことができる. あるいは, 仮に D_X の群を使えば, 全く全く同様の議論により証明することもできる.

2.2 Kac-Moody 11-代数の旗多様体

Kac-Moody 11-代数に対して, 定理 1.4.1 の証明で述べた議論を適用しようとすると, まづ $\mathfrak{g}$ の旗多様体を構成しなければならぬ. ここに $\square$ として解決する.

以下 $\mathfrak{g}$ を Kac-Moody 11-代数とする.

リー群スケーラ H, N^+, N^-, B^+, B^- を次で定める:

$$H = \text{Spec}(\mathbb{C}[D]),$$

$$N^\pm = \varprojlim_{\mathbb{Z}} \exp(m^\pm / (\text{ad } m^\pm)^{\mathbb{Z}} m^\pm),$$

$$B^\pm = (H \subset N^\pm \text{ の半直積}).$$

H は有限次元であるが, $N^\pm, B^\pm$ は無限次元である. $\mathfrak{g}$ が有限次元の場合, 対応するリー代数の座標環は多様体 $\text{Exp}(\mathfrak{g})$ のある種の部分として捉えることができる. この方法で, $\mathfrak{g}$ が一般の Kac-Moody リー代数の場合もリー群 G を構成することができる (詳細略). G はリー群スケーラ H として定義され, B^+ の左側の局所自由な作用と B^- の右側の局所自由な作用をもつ. このとき, $\mathfrak{g}$ の旗多様体は商多様体

$$X = G/B^- \quad ([K1])$$

として定義することができる. また, $\mathfrak{g}$ が有限次元のとき, $B^+ \cap B^- / B^-, B^- \cap B^- / B^-$ の軌道 X^μ, X_μ が X の局所閉部分多様体として定義でき, 次が成立する.

命題 2.2.1 ([K1])

$$(i) \quad X = \bigsqcup_{\mu \in W} X^\mu$$

$$(ii) \quad X^\mu \simeq \mathbb{C}^{\ell(\mu)} \text{ かつ } \dim X^\mu = \ell(\mu)$$

$$(iii) \quad \overline{X^\mu} = \bigsqcup_{\nu \geq \mu} X^\nu$$

命題 2.2.2 ([KT37])

$$(i) \bigcup_{w \in W} X_w = \bigsqcup_{w \in W} X_w \subset X.$$

$$(ii) X_w \simeq \mathbb{C}^{l(w)}.$$

$$(iii) \overline{X_w} = \bigsqcup_{y \leq w} X_y$$

ただし, 無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_i | i \in \mathbb{N}] = \varinjlim_n \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に対し, $\mathbb{C}^\infty = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_i | i \in \mathbb{N}]) = \varprojlim_n \mathbb{C}^n$ とおき, 旗多様体 X は無限次元ではあるが, 局所的には $\mathbb{C}^\infty$ と同型なスキームである。

2.3 定理 1.5.1, 1.5.2 の証明

$\mathfrak{g} \in \text{Kac-Moody}$ 1-システムと取る。まず定理 1.5.1 の証明について述べる。 X は $\mathfrak{g}$ の旗多様体とする。 X はスキームとして無限次元スキームなので, このうちで (正則木 $b| \ni -$) D_X 加群の理論を展開することが出来る。有限次元の場合と同様に, $w \in W$ に対して

$$\mathcal{U}_w = (\mathcal{X}_{X_w}^{l(w)}(\mathcal{O}_X))^+, \quad \mathcal{L}_w = \text{Image}(\mathcal{U}_w \longrightarrow \mathcal{U}_w^+)$$

とおくと, これは正則木 $b| \ni -$ 左 D_X 加群になる。

W の有限部分集合 F が, 条件

$$w \in F, y \in W \Rightarrow y \in F$$

を満たすとき, F は可容的集合という。このとき,

$$X^F = \varinjlim_{w \in F} X^w$$

は X の準コンパクトな開集合である. $w \in F$ に対し, $\mathcal{M}_w|X^F$ あるいは $\mathcal{L}_w|X^F$ は正則ホモノミー D_{X^F} の加群で, したがって $\mathcal{L}_w|X^F$ は既約になる. また $\mathcal{M}_w|X^F$ は有限生成加群であり, 各生成因子は, ある $y \in F$ に対する $\mathcal{L}_y|X^F$ と同型である. 有限生成加群である正則ホモノミー $\mathcal{M}$ は D_{X^F} の加群であり, 生成因子のある $y \in F$ に対する $\mathcal{L}_y|X^F$ と同型に存在する α の存在図 $\in M_0^F$ とおく.

このとき, 正則ホモノミー $\mathcal{M}$ は D_X の加群 $\mathcal{M}$ であり, 任意の可算的集合 F に対して $\mathcal{M}|X^F \in \text{Ob}(M_0^F)$ となる α の図 $\in M_0$ であると, $M_0 = \varprojlim_F M_0^F$ とする. $n = 2$, $\mathcal{M} \in \text{Ob}(M_0)$ に対して, $\hat{H}^n(X; \mathcal{M})$ を次で定める. $H^n(X^F; \mathcal{M})$ は自然に $\mathcal{L}_y$ の加群であるが, ウェイト空間 $H^n(X^F; \mathcal{M})_{\mathcal{M}}$ は十分大至多 F のとり方によって異なる. これを $\hat{H}^n(X; \mathcal{M})_{\mathcal{M}}$ とおき, $\hat{H}^n(X; \mathcal{M}) \in$

$$\hat{H}^n(X; \mathcal{M}) = \bigoplus_{\mathcal{M} \in P} \hat{H}^n(X; \mathcal{M})$$

とある. このとき, $\hat{H}^n(X; \mathcal{M})$ は自然に $\mathcal{O}$ の加群になる.

定理 2.3.1 ([K2])

- (i) 任意の $\mathcal{M} \in M_0$ に対して $\hat{H}^n(X; \mathcal{M}) = 0$ ($n > 0$).
- (ii) $\hat{H}^0(X; \mathcal{M}_w) \simeq M(w \circ o)$
- (iii) $\hat{H}^0(X; \mathcal{L}_w) \simeq L(w \circ o)$.

定理1.5.1 は, この定理と $\overline{X^\omega}$ の交りコホモロジー群の計算 ([KT1]) から従う.

定理1.5.2 も同じ思想のもとで証明できるが, 基本的には異なる点のみについて注意しておく. 旗多様体としては, $X = G/B^-$ だが G の定義において B^+ と B^- の役割をいれかえて G' と B^+ で代ったもの $X' = G'/B^+$ を用いる. また Schubert 元 X^ω のかわりに $B^+ \omega B^+ / B^+$ の類似物 $X'_\omega \subseteq \mathbb{C}^{X(\omega)}$ を用いる. これは左 D 加群ではなく, 右 D 加群を用いる (無限次元多様体上では左 D 加群と右 D 加群は全くの別物). その他、詳細は略す.

文献

[BB] A. Beilinson, J. Bernstein, localisation de $\mathfrak{g}$ -modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 15-18.

[BK] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math., **64** (1981), 387-410.

[C1] L. Casian, Kazhdan-Lusztig multiplicity formulas for Kac-Moody algebras, C. R. Acad. Sci. Paris, **310** (1990), 333-337.

[C2] L. Casian, Kazhdan-Lusztig conjecture in the negative level case (Kac-Moody algebras of affine type), preprint.

[DGK] V. V. Deodhar, O. Gabber, V. Kac, Structure of some categories of representations of infinite dimensional Lie algebras, Adv. in Math., **45** (1982), 92-116.

- [J] J. C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewicht, Lecture Notes in Math. **750**, Springer Verlag, 1979.
- [Kac] V. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd ed.), Cambridge Univ. Press, 1990.
- [KK] V. Kac, D. Kazhdan, Structure of representations with highest weight of infinite dimensional Lie algebras, Adv. Math., **34** (1979), 97-108.
- [K1] M. Kashiwara, The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra, Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory, supplement of Amer. J. Math., Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1989, 161-190.
- [K2] M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras, Progress in Math. **87**, Birkhäuser, 1991, 407-433.
- [KT1] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras II, Progress in Math. **92**, Birkhäuser, 1990, 159-195.
- [KT2] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Characters of the negative level highest-weight modules for affine Lie algebras, Intern. Math. Res. Notices. (1994), 151-160.
- [KT3] M. Kashiwara, T. Tanisaki, Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level, Duke Math. J. in press.
- [KL1] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. **53** (1979), 165-184.
- [KL2] D. Kazhdan, G. Lusztig, Schubert varieties and Poincaré duality, Proc. Symp. in Pure Math., **36** (1980), 185-203.