

"rational singularity" の cyclic covering について (標数 $p > 0$ の場合)

東海大・理 渡辺敬一

序

標数 0 の代数多様体の特異点の理論に於て, rational singularity の概念から始り, terminal, canonical, elliptic, log-terminal, log-canonical 等々多くの特異点の概念が定義されている。一方, 標数 $p > 0$ の環に対しても, Frobenius 写像と, これにより定義される ideal の tight closure の概念を用いて, F-regular, F-rational, F-pure 等の概念が定義されている。

本稿の目的の一つは, F-regular (正確には strongly F-regular), F-pure ring の finite cyclic cover に対する挙動を調べる事である。integral divisor に因する cyclic cover に対して, F-regular, F-pure という性質が保存される事は [9] で見ているが, 一般の (fractional divisor に対する) cyclic cover のときは, 「分数部分」 D' により, cyclic cover が F-regular (F-pure) にな

るか否かが記述される, この事実は, 丁度標数0の "log-terminal (又は log-canonical) pair" の挙動と一致する.

一方, 2次元の F-regular ring, normal F-pure ring を分類すると, 前者は "quotient singularity", 後者は, 前者に simple elliptic singularity と cusp singularity 及びそれらに cyclic covering として $\mathbb{A}^1$ rational singularity を加えたものになり, それぞれ log-terminal, log-canonical singularity と一致する. このよりに, F-regular と log-terminal, F-pure と log-canonical が「同値」となる事が期待されるが, 本稿では.

「標数0の特異点が, 無限個の素数 p に対し, その標数 p への reduction が F-regular (resp. F-pure) なら, log-terminal (resp. log-canonical) である。」を canonical class が有限 ($\mathbb{Q}$ -Gorenstein) の場合を示す.

逆に, log-terminal (resp. log-canonical) singularity は, 無限個の素数 p に対し reduction mod. p が F-regular (resp. F-pure) になるか? という問題は未解決だが, 標数0の特異点の性質の判定に標数 $p > 0$ の概念が使われるのは意味深い事と思われる.

§ 1. Preliminaries.

R は標数 $p > 0$ の環とする。以下 R は reduced と仮定し, $R^0 := R \setminus \bigcup \{ \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ は } R \text{ の minimal prime} \}$ とおく。

$F: R \rightarrow R$ を Frobenius map, $F(a) = a^p$ とし, F と $R \hookrightarrow R^{1/p}$ を同一視する。本稿においては, 条件

F は finite map

を常に仮定する。(例えば, R は体 k 上 ess. of fin. type, k は perfect field 上有限生成. また R は complete local, 剰余体 k は上の条件をみたす。)

定義 (1.1). (1) (Hochster-Roberts, [4]) R が F -pure $\Leftrightarrow R \hookrightarrow R^{1/p}$ が R -module として split.

(2) (Hochster-Huneke, [3, 2]) R が strongly F -regular $\Leftrightarrow \forall c \in R^0, \exists q = p^e, R \hookrightarrow R^{1/q}, 1 \rightarrow c^{1/q}$ が split as R -module.

注. "F-regular" という用語には, まだ研究がすすんでいないという事もあり, 他には, "weakly --", 単に "F-regular" 等の言葉が使われているが, R が Gorenstein のときには, 上記の3つは一致する。(cf. [3])

$(R, \mathfrak{m})$ が local ring のとき, $R/\mathfrak{m}$ の injective envelope $E := E_R(R/\mathfrak{m})$ による F -pure, F -regular の判定がある。

Lemma (1.2). $(R, m) : \text{local}$, $E = E_R(R/m)$ のとき,

(1) R が F -pure $\Leftrightarrow F \otimes 1 : E = E \otimes_R R \rightarrow E \otimes_R R^{1/p}$
が injective.

(2) R が strongly F -regular $\Leftrightarrow \forall c \in R^\circ, \exists q = p^e$,
 $c^{1/q} \cdot F^e(z) \neq 0$ in $F^e(E) := R^{1/q} \otimes_R E$, $z \in$
 $z \in \text{Soc}_R(E) = [0 : m]_E$ の生成元.

(証明) (1) は [4], (2) は $R \xrightarrow{f} R^{1/p}, 1 \mapsto c^{1/p}$

が split $\Leftrightarrow f \otimes 1 : E \rightarrow R^{1/p} \otimes_R E$ が split $\Leftrightarrow f \otimes 1$ が injective
 $\Leftrightarrow c^{1/p} \cdot F^e(z) = (f \otimes 1)(z) \neq 0$ ([9], (1.2)).

[9] (1.4) では (2) の条件を "weakly F -regular" と
同値としたが, 上で示したように, "strongly F -regular" と
同値が正しい. (両者の区別がなくなると一番良いのだ.)

$(R, m) : \text{normal local}$ で, canonical module K_R
をもつとき, $E_R(R/m) \cong H_m^d(K_R)$ であり ($d = \dim R$). こ
のとき, $H_m^d(K_R)$ への Frobenius 写像は

$$H_m^d(K_R) \xrightarrow{F^e} H_m^d(K_R) \otimes_R R^{1/p} \cong H_m^d((K_R^{(q)})^{1/q})$$

で得られる. ここで, $K_R = R(\bar{K}_R)$ と divisor で書くと,
 $K_R^{(q)} = R(q\bar{K}_R)$ である. $()^{1/q}$ は $R^{1/p}$ の商体で考える事
を示す. ([9], (2.5)). これを用いて次の事を示す.

命題 (1.3). ([9], 2.7) $(R, m) \rightarrow (S, n)$ が normal
local rings の finite local hom で, codim. 1 で étale のとき,

R が F -pure (resp. strongly F -regular) $\Rightarrow S$ もそう.

以下に於て cyclic cover (又は normal $\mathbb{Z}_r$ -graded ring) の概念が主要な役割を果たすので、これに関する言葉を準備する。(詳しくは, [7] 参照)

$S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} S_i$ を cyclic group $\mathbb{Z}_r$ による grading をもつ normal 整域 とする。このとき, $S_0 = R$ も normal で, $u \neq 0 \in S_1$ をとり, R の商体を K , $u^r = f$ とおくと,

$D := \frac{1}{r} \operatorname{div}_R(f)$ とおいて, $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(iD) \cdot u^i$ と書ける。但し, $R(iD) = \{x \in K \mid \operatorname{div}_R(x) + iD \geq 0\}$ 。この記号の下で, S を

$S = S(R, D, f)$ と表す事にする。一般には, D は $\mathbb{Q}$ -係数の divisor で, $D = \sum \frac{p_v}{q_v} \cdot V$ ($q_v, p_v = 1, q_v > 0$) と表すとき, D の分数部分を表す divisor を,

$$D' := \sum \frac{p_v - 1}{q_v} \cdot V \quad \text{と書くことにする。}$$

R の canonical module を K_R , $\bar{K}_R \in \operatorname{Div}(R)$ を $K_R = R(\bar{K}_R)$ とすると,

$$K_S \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(\bar{K}_R + D' + iD) \cdot u^i,$$

特に, K_S が S -free $\Leftrightarrow \exists i, \bar{K}_R + D' \sim iD$ (linearly equivalent) であり事を注意しておこう。

§2. Cyclic cover の F-regularity, F-purity.

R を標数 $p > 0$ の体を含む Noetherian local normal ring, $R \hookrightarrow R^{1/p}$ は finite とする。 $\mathfrak{m}$ を R の最大イデール とする。 $S = S(R, D, f)$ を R の $\mathbb{Z}$ -cyclic cover, $p \nmid \mathbb{Z}$ とする。 次の条件 (*)

(*) $\mathbb{Z} = \min \{ i > 0 \mid iD \text{ は } R \text{ の principal divisor} \}$ を決定すると, S も local ring である。

我々の目標は, S が F-pure (resp. strongly F-regular) になるための条件を (R, D) を用いて記述する事だが, 結果として log-terminal, log-canonical singularity と同じ現象が現れる事に注意したい。

まず, $D \in \text{Div}(R)$ (integral divisor) のときは, (1.3) により,

(2.1) $S = S(R, D, f)$, $D \in \text{Div}(R)$, $p \nmid \mathbb{Z}$ のとき,
 S が F-pure (resp. strongly F-regular) $\Leftrightarrow R$ が F-pure (resp. strongly F-regular)。

($\Leftarrow$ は (1.3) だが, $\Rightarrow$ はどちらの性質も pure subring — 特に直和因子 — に遺伝する事より。 [3], [4] 参照。)

問題は D が分数部分をもつ時だが, (1.2) の議論を用いて F-pure, strongly F-regular の条件を判定する。

$$K_S \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(\bar{K}_R + D' + iD) \cdot u^i$$

だが、次の事実が重要である。($d := \dim R$ とする,)

Lemma (2.2). $\text{Soc}_S(H_m^d(K_S)) = \text{Soc}_R(H_m^d(R(\bar{K}_R + D')))$
 $= H_m^d(R(\bar{K}_R)) = H_m^d(K_R)$. (即ち, K_S の socle は "degree 0" の部分に存在する。

(証明) $H_m^d(K_S) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} H_m^d(R(\bar{K}_R + D' + iD)) \cdot u^i$ が S 上 injective module である事は既知だから, $\text{Soc}_S(H_m^d(K_S))$ は長さ 1 の S -module である。従って, $\text{Soc}_R(H_m^d(R(\bar{K}_R + D')))$ が S の maximal ideal $\mathfrak{m} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r, i \neq 0} R(iD) \cdot u^i \oplus \mathfrak{m}$ により零化される事を見れば良い。 $\mathfrak{m}$ の元をかけて 0 になるのは Soc_R の元よりあきらかたから, $a \in R(iD)$ と $\xi \neq 0 \in \text{Soc}_R(H_m^d(K_R))$ に対して, $au^i \cdot \xi = 0$ in $H_m^d(R(\bar{K}_R + D' + iD)) \cdot u^i$ を示せば良い。とこで, $R(iD)$ の定義より, $\text{div}_R(a) + iD \geq 0$ だが, $\mathfrak{r}$ の最小性 (条件 (4)) より等号は成立たない。従って, $a\xi \in H_m^d(R(\bar{K}_R - \text{div}_R(a)))$ はこの加群の socle の元だが, 次の sublemma により, $H_m^d(R(\bar{K}_R + D' + iD))$ に於て $a\xi = 0$ であり, $\text{Soc}_R(H_m^d(K_R)) \subset \text{Soc}_S(H_m^d(K_S))$ がわかる。

Sublemma $I, J \subset K$ を R の divisorial ideal で (R -reflexive な fractional ideal) $I \subsetneq J$ とする。このとき $I \subset J$ から得られる写像 $H_m^d(I) \rightarrow H_m^d(J)$ は injection である。

[5]に、"pair (X, Δ) が log-terminal (resp. log-canonical) という定義があるが、これの真似をしてみよう。

以下に於て、 $p \neq v$ と仮定する。

定義 (2.3). $D' \in \text{Div}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $\sum \frac{q_v-1}{q_v} \cdot V$ の形のものとする。このとき、

(1) (R, D') が F-pure $\Leftrightarrow F: H_m^d(R(\bar{k}_R + D')) = H_m^d(k_R) \rightarrow H_m^d(R(p(\bar{k}_R + D')))$ が injection.

(2) (R, D') が F-regular $\Leftrightarrow \forall c \in R, c \neq 0, \exists q = p^e, c \cdot F^e(\xi) \neq 0$ in $H_m^d(R(q(\bar{k}_R + D')))$.

すると、(2.3) と (2.2) より直ちに次が得られる。

定理 (2.4). $S = S(R, D, f)$ のとき、

(1) S が F-pure $\Leftrightarrow (R, D')$ が F-pure

(2) S が strongly F-regular $\Leftrightarrow (R, D')$ が F-regular.

(証明) 一般に、S-divisorial ideal $I := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(E + iD) \cdot u^i$ ($E \in \text{Div}(R) + \sum_V \frac{1}{q_v} \cdot \mathbb{Z} \cdot V \subset \text{Div}(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) に対して、

$$I^{(g)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(q \cdot E + iD) \cdot u^i \quad \text{であり、従って、特に}$$

$$K_S^{(g)} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_r} R(q(\bar{k}_R + D') + iD) \cdot u^i \quad \text{であるので、(2.2)}$$

より求める結果を得る。

§ 3. F-regular (F-pure) ring

$\Rightarrow$ log-terminal (log-canonical) singularity.

これまで述べて来たように, F-regular ring と log-terminal singularity, F-pure ring と log-terminal singularity は本質的に同値な概念と思える。ただし, 標数 0 の環を標数 $p > 0$ に reduction した時の Frobenius 写像の作用が良くわからない等, いさゝか難しい気はあるように思われる。ここでは, "標数 0 の特異点が無数回の $p > 0$ の reduction で F-pure (resp. F-regular) なら log-canonical (resp. log-terminal)" という事実の "Frobenius splitting" ([6] 参照) を用いた証明を試みよう。

まず, log-terminal (resp. log-canonical) singularity の定義を復習しよう。 ([5])

(3.1) (X, x) 標数 0 の体 K 上定義された normal algebraic variety の特異点とし,

$f: Y \rightarrow X$ を resolution, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ は Y の exceptional set, E は simple normal crossing と仮定する。(SNC と略す。) また, $\exists r > 0$, $\omega_X^{[r]} = \mathcal{O}_X(rE_X)$ は invertible とする。 ($E_X: X$ の canonical divisor).

$$E_Y = f^*(E_X) + \sum_{i=1}^n a_i E_i$$

と書くとき, X は $\log$ -terminal (resp. $\log$ -canonical)

$\Leftrightarrow a_i > -1$ (resp. $a_i \geq -1$) ($i=1, \dots, n$).

定理 (3.2). (X, α) は (3.1) の通りとする。もし,

$(\mathcal{O}_X, \alpha)$ の標数 p への reduction が無限個の $p > 0$ に対し F -pure (resp. strongly F -regular) $\Rightarrow (X, \alpha)$ は $\log$ -canonical (resp. $\log$ -terminal) singularity.

(証明) まず, (3.1) の X の resolution $f: Y \rightarrow X$ を fix する。 f, Y, X はすべて K 上 of finite type であるから, $\exists A: \mathbb{Z}$ 上有限生成の ring で $A \subset K$, $\exists f_A: Y_A \rightarrow X_A$, morphism of schemes of finite type over A s.t.

$f_A \otimes_A K: Y_A \otimes_A K \rightarrow X_A \otimes_A K$ は f と一致する。

条件 " Y, E は $\text{Spec}(A)$ 上 smooth" は open condition であるから (3.1) の条件をすべて保った, 標数 $p > 0$ の体 $k(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$) が存在する。即ち,

$$f_A \otimes_A k(\mathfrak{p}): Y_A \otimes_A k(\mathfrak{p}) \rightarrow X_A \otimes_A k(\mathfrak{p})$$

は X の標数 $p > 0$ への reduction の resolution である。

従って我々は次の定理を示せばよいことになる。

定理 (3.3). $f: Y \rightarrow \text{Spec}(R)$, $(R, \mathfrak{m})$ は標数 $p > 0$ の local ring, f は resolution として, f の exceptional

set E は simple normal crossing とする。また, R は quasi-Gorenstein (ω_R が R -free) とする。このとき, $(K_R = R$ とおいて) $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(\sum a_i E_i)$ とするとき, R が F -pure (resp. strongly F -regular) ならば, $\forall a_i \geq -1$ (resp. ≥ 0).

("log-terminal, log-canonical singularity" も, F -pure, (strongly) F -regular ring もとすると canonical cover E と, τ も保たれるので ($p \nmid \dim(K_R)$ の order のとき), $K_R \cong R$ のときに帰着して良い。)

(証明) $U = Y - E \cong \text{Spec}(R) - \text{Sing}(R)$ とおく。まず, " R が F -pure" を仮定すると, $\exists \varphi: R^{1/p} \rightarrow R$, R -hom. $\tau, \varphi \circ i = \text{id}_R$ ($i: R \hookrightarrow R^{1/p}$)。この φ は U に制限する事により, $\varphi: \mathcal{O}_U^{1/p} \rightarrow \mathcal{O}_U$ を引き起す。

さて, 一般に, "adjunction formula" により, 標数 p の scheme X に対し, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{1/p}, \omega_X) \cong (\omega_X)^{1/p}$ ($(\omega_X)^{1/p}$ は $(X, \mathcal{O}_X^{1/p})$ の dualizing module.)。従って, ω_X が invertible とすると,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{1/p}, \mathcal{O}_X) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{1/p}, \omega_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\omega_X)^{-1} \\ &\cong (\omega_X)^{1/p} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\omega_X)^{-1} \cong (\omega_X^{\otimes (1-p)})^{1/p} \\ &= (\mathcal{O}_X((1-p)K_X))^{1/p}. \end{aligned}$$

従って, $\varphi \in H^0(U, \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^{1/p}, \mathcal{O}_U)) \cong H^0(U, \omega_U^{\otimes (1-p)} K_U)$.

我々は、この φ を Y に延長する事を考える。

$H^0(U, \mathcal{O}_U) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = R$ である (codim (Sing(R)) ≥ 2),
 $\forall b_i \geq 0$ のとき, $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum b_i E_i)) \supseteq H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = R$ で,
 $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum b_i E_i)) = R$. $H^0(Y, \mathcal{O}_Y((1-p)\bar{E}_Y)) =$
 $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum (1-p)a_i E_i))$ である, もし $\forall a_i \leq 0$ のとき,
 $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\sum (1-p)a_i E_i)) = H^0(U, \mathcal{O}_U(\sum (1-p)a_i E_i)) = R$ と
なり, φ は Y に延長される。しかし, 我々の示した結論は,
 $\forall a_i \geq -1$ (resp. ≥ 0) である, $a_i > 0$ なる E_i について
は考える必要がない。ゆえに,

$$Y' := Y - \bigcup_{a_i > 0} E_i$$

とおく。 $(1-p)\bar{E}_{Y'} \geq 0$ であるから, $H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}((1-p)\bar{E}_{Y'}))$
 $\cong H^0(U, \mathcal{O}_U) \cong R$, φ は $\psi: \mathcal{O}_{Y'}^{1/p} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}$ に延長される。

次に, 合成写像 $\varphi \circ i: \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}^{1/p} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}$ を考える
と, $\varphi \circ i \in H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}) \cong R \cong H^0(U, \mathcal{O}_U)$ であるから, R の
元の multiplication と同一視され, また, その値は U 上の
作用で決定される。我々は $R \hookrightarrow R^{1/p}$ の splitting $R^{1/p} \rightarrow R$
から出発したから, $\varphi \circ i$ は R の unit である。従って, 合
成写像 $\psi \circ i: \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}$ は 各点で bijection となければ
ならない。

さて, もし, ある $a_i < -1$ とすると, $(1-p)a_i \geq p$ である。
又 $x \in E_i \cap Y'$ に於て, E_i の定義方程式を f_i

とおくと, x での $\mathcal{O}_{Y'}((1-p)\tilde{K}_{Y'})$ の生成元を $\tilde{\psi}_0$ とする
 と, ψ に対応する $\tilde{\psi} \in H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}((1-p)\tilde{K}_{Y'}))$ は x に於て,
 $\tilde{\psi}_x \in f_{i*}(\tilde{\psi}_0)_x \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$ とみたし, 従って, $\psi_x \in f_{i*}(\psi_0)_x \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$.
 ゆえに, $\psi_x \circ i: \mathcal{O}_{Y',x} \hookrightarrow (\mathcal{O}_{Y',x})^{1/p} \rightarrow \mathcal{O}_{Y',x}$ の image は $f_{i*}\mathcal{O}_{Y',x}$
 に含まれ, $\psi \circ i$ は bijection である事に至する。ゆえに,
 $\forall a_i \geq -1$ で, F -pure $\Rightarrow$ log-canonical が示せた。

また, $\exists c \neq 0 \in R$, $c \in I(\text{Sing}(R))$, $\exists q = p^e$,
 $R \rightarrow R^{1/q}$, $1 \rightarrow c^{1/q}$ が split by $\varphi: R^{1/q} \rightarrow R$ とすると,
 上述のように, $\varphi|_U: \mathcal{O}_U^{1/q} \rightarrow \mathcal{O}_U$ と $\psi: \mathcal{O}_{Y'}^{1/q} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'}$ に延
 ばしたとき, $\exists a_i = -1$ とすると, $x \in E_i \cap Y'$ に於て,
 $\exists \psi_0: (\mathcal{O}_{Y',x})^{1/q} \rightarrow \mathcal{O}_{Y',x}$, $c \cdot \psi \in f_{i*}(\psi_0)_x \cdot \mathcal{O}_{Y',x}$ ($f^*(c) \in \mathcal{O}_Y(-E)$
 より). 従って, $\mathcal{O}_{Y',x} \xrightarrow{\exists 1} (\mathcal{O}_{Y',x})^{1/q} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{Y',x}$ の像が $f_{i*}\mathcal{O}_{Y',x}$
 に含まれる事になり, ψ が各点で splitting を与える事に至す
 る。従って, $\forall a_i > -1$, R は log-terminal が示せる。

特に, R が strongly F -regular ならば, 上の条件がめ
 たされ, $\forall a_i > -1$ が示せる。

追記. このノートは、本シンポジウムに於ける 池-淳記
 の講演の "char. = $p > 0$ " の部分をまとめたもので、前半の
 "標数 0" の部分は池氏のノートを参照して下さい。

REFERENCES

- [1] R. Fedder and K.-i. Watanabe, A characterization of F-regularity in terms of F-purity, in "Commutative Algebra", Proc. Microprogram, MSRI Publ. 15, 227-245, Springer, 1989.
- [2] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure, Invariant theory, and the Briancon-Skoda Theorem, J. of Amer. Math. Soc. 3 (1990), 31-116.
- [3] M. Hochster and C. Huneke, Tight closure and strong F-regularity, Mem. Soc. Math. France, 38 (1989), 119-133.
- [4] M. Hochster and J. L. Roberts, The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. in Math. 21 (1976), 115-175.
- [5] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to minimal model problem, Alg. Geom. Sendai (T. Oda ed.), Adv. studies in Pure Math. 10, Kinokuniya-North Holland (1987), 283-360.
- [6] V.B. Mehta and A. Ramanathan, Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties, Ann. of Math. 122 (1985), 27-40.
- [7] M. Tomari and K.-i. Watanabe, Normal $\mathbb{Z}_r$ -graded rings and normal cyclic covers. (Normal cyclic covers, I), to appear in Manuscripta Math.
- [8] K.-i. Watanabe, Study of F-purity in dimension two, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra: in honor of Masayoshi Nagata", vol. II, Kinokuniya, Tokyo, 1988, 791-800.
- [9] K.-i. Watanabe, F-regular and F-pure normal graded rings, J. of Pure and Appl. Alg. 71 (1991), 341-350.