

基本的な非線形微分方程式から導かれる Tsallis エントロピーとマルチフラクタル構造 Tsallis entropy and multifractal structure derived from the fundamental nonlinear differential equation

須鎗弘樹 (Hiroki Suyari)*

千葉大学 大学院融合科学研究科

〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33

Graduate School of Advanced Integration Science, Chiba University
Chiba 263-8522, Japan

はじめに 物理現象としてフラクタル・マルチフラクタルが数々観測され、その安定性と普遍性ゆえに、それら物理現象を統一的に説明できる統計力学の構築を目指して、1988 年に統計物理学者の Constantino Tsallis は、ある提案をした。それは、Shannon エントロピーを 1 パラメータ拡張した一般化エントロピー（今日、Tsallis エントロピーと言われる）を用いて、Jaynes のエントロピー最大化原理¹による Boltzmann-Gibbs 統計力学の再構成法にしたがって、従来の統計力学を拡張することである。しかし、Tsallis エントロピーは、1988 年の Tsallis の論文の 1 ページ目にその導出過程もなく物理的な背景から直観的に与えられ、しかも、彼らの言う（準）平衡分布と実データとのカーブフィッティングの論文が先の提案後に多数現れたため、理論としての意義・有効性に疑問の声も強かった。しかし、その背景には、自然な数理構造が存在することが最近わかってきた。端的に言えば、従来の Boltzmann-Gibbs 統計力学の数理は、指数関数族 $\frac{dy}{dx} = y$ の数理であり、その拡張である Tsallis 統計力学の数理は、その 1 パラメータ拡張である $\frac{dy}{dx} = y^q$ の数理である。そこで、本稿では、非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ から Tsallis エントロピーを通してマルチフラクタル構造がいかに現れるかを述べる。

1 非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ から Tsallis エントロピーへ

指数関数の特徴付けとして最も有名な定式化は、最も簡単な線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y$ であろう。ここでは、その一般化として次の非線形微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (q > 0) \quad (1)$$

を出発点にする。この非線形微分方程式を解くと、

$$\frac{y}{\exp_q(C)} = \exp_q \left(\frac{x}{(\exp_q(C))^{1-q}} \right) \quad (2)$$

*e-mail: suyari@faculty.chiba-u.jp, suyari@ieee.org

¹E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics, Phys.Rev.106, 620-630, 1957; E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics II, Phys.Rev.108, 171-190, 1957.

を得る [1]. ここで, C は, $1 + (1 - q)C > 0$ を満たす任意定数で, $\exp_q$ は q -指数関数と言われる一般化指数関数である [2][3].

定義 1 (q -指数関数, q -対数関数) $q > 0$ を任意に固定する. $1 + (1 - q)x > 0$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ の集合上の関数

$$\exp_q x := [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3)$$

を q -指数関数といい, $\mathbb{R}^+$ 上の関数

$$\ln_q x := \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (4)$$

を q -対数関数という.

q -指数関数に対して

$$\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x + y), \quad (5)$$

あるいは q -対数関数に対して

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q(x) + \ln_q(y) \quad (6)$$

を満たすように, 新しい積 $\otimes_q$ を定める. この $\otimes_q$ を q -積という [4][5].

定義 2 (q -積) $x^{1-q} + y^{1-q} - 1 > 0$ を満たす $x, y > 0$ に対して,

$$x \otimes_q y := [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]^{\frac{1}{1-q}} \quad (7)$$

を x と y の q -積という.

注意 3 $x^{1-q} + y^{1-q} - 1 > 0$ の条件は, q -指数関数の定義域の条件 $1 + (1 - q)x > 0$ と (5) から導かれる.

q -積 $\otimes_q$ を用いて, q -積の階乗である q -階乗 $n!_q$ を定義する [6].

定義 4 (q -階乗) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ と $q > 0$ に対して,

$$n!_q := 1 \otimes_q \cdots \otimes_q n. \quad (8)$$

を q -階乗という.

q -階乗 $n!_q$ に対して, 次の q -Stirling の公式が成り立つ [6].

定理 5 (q -Stirling の公式) 十分大きな自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の近似が成り立つ.

$$\ln_q(n!_q) \simeq \begin{cases} \frac{n}{2-q} \ln_q n - \frac{n}{2-q} + O(\ln_q n) & \text{if } q \neq 2, \\ n - \ln n + O(1) & \text{if } q = 2. \end{cases} \quad (9)$$

q -積 $\otimes_q$ と同様にして, q -比 $\oslash_q$ は次の等式から定義される [4][5].

$$\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x - y), \quad (10)$$

$$\ln_q(x \oslash_q y) = \ln_q(x) - \ln_q(y). \quad (11)$$

定義 6 (q -比) $x^{1-q} - y^{1-q} + 1 > 0$ を満たす $x, y > 0$ に対して,

$$x \oslash_q y := [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]^{\frac{1}{1-q}} \quad (12)$$

を x と y の q -比という.

q -積 $\otimes_q$ と q -比 $\oslash_q$ を用いて, q -多項係数が次のように定義される [6].

定義 7 (q -多項係数) $n = \sum_{i=1}^k n_i$ と $n_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, k$) に対して,

$$\left[\begin{matrix} n \\ n_1 \cdots n_k \end{matrix} \right]_q := (n!_q) \oslash_q [(n_1!_q) \otimes_q \cdots \otimes_q (n_k!_q)] \quad (13)$$

を q -多項係数という.

さて, 以上の定式化の目的は, すべて次の有名な関係式を拡張するためである.

$$\ln \left[\begin{matrix} n \\ n_1 \cdots n_k \end{matrix} \right] \simeq n S_1 \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right) \quad (14)$$

つまり, (14) の左辺の対数と多項係数は, それぞれ (4) と (13) に拡張されており, Stirling の公式による近似を表す $\simeq$ は, (9) によって q -Stirling の公式として拡張・定式化されている. 以上の準備のもと, (14) の左辺の拡張に上記の定式化と近似を使えば, 右辺には Tsallis エントロピーが現れる. つまり, 非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ に対応するエントロピーは, Tsallis エントロピーであることがわかる [6].

定理 8 (*Boltzmann の関係式の拡張*) n が十分に大きいとき, q -多項係数 (13) の q -対数から, Tsallis エントロピーが導かれる.

$$\ln_q \left[\begin{matrix} n \\ n_1 \cdots n_k \end{matrix} \right]_q \simeq \begin{cases} \frac{n^{2-q}}{2-q} \cdot S_{2-q} \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right), & q \neq 2 \text{ のとき,} \\ -S_1(n) + \sum_{i=1}^k S_1(n_i), & q = 2 \text{ のとき.} \end{cases} \quad (15)$$

ここで, S_q は Tsallis エントロピー:

$$S_q(p_1, \dots, p_k) := \frac{1 - \sum_{i=1}^k p_i^q}{q-1}, \quad (16)$$

$S_1(n)$ は,

$$S_1(n) := \ln n. \quad (17)$$

2 Tsallis 統計の 4 つの数理構造

(15) において, $q \neq 2$ のときは, 加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ を表している. この加法的双対性以外に, Tsallis 統計力学では, 乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ や q -トリプレットなどの関係が知られている. (ただし, 著者が理論的に見つけるまでは, q -トリプレットは conjecture であった.) そこで, 加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ が現れている関係 (15) を, 乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ も表現できるように拡張したところ, q -トリプレットなど, Tsallis 統計力学の代表的な 4 つの数理構造が自然に導かれる [7]. ここでは, その結果だけを簡潔に書いておく.

定義 9 ((μ, ν) -階乗) $n \in \mathbb{N}$ と $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ に対して, (μ, ν) -階乗 $n!_{(\mu, \nu)}$ を次のように定義する.

$$n!_{(\mu, \nu)} := 1^\nu \otimes_\mu 2^\nu \otimes_\mu \cdots \otimes_\mu n^\nu. \quad (18)$$

ただし, $\nu \neq 0$ とする.

定理 10 ((μ, ν) -Stirling の公式)

$$\ln_\mu(n!_{(\mu, \nu)}) = \begin{cases} \frac{n \ln_\mu n^\nu - \nu n}{\nu(1-\mu)+1} + O(\ln_\mu n) & \text{if } \nu(1-\mu)+1 \neq 0, \\ \nu(n - \ln n) + O(1) & \text{if } \nu(1-\mu)+1 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

定義 11 ((μ, ν) -多項係数) 自然数 $n_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, k$) と $n = \sum_{i=1}^k n_i$ に対して, (μ, ν) -多項係数を (μ, ν) -階乗 (18) を用いて次のように定義する.

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n_1 \quad \dots \quad n_k \end{array} \right]_{(\mu, \nu)} := (n!_{(\mu, \nu)}) \oslash_{\mu} [(n_1!_{(\mu, \nu)}) \otimes_{\mu} \dots \otimes_{\mu} (n_k!_{(\mu, \nu)})]. \quad (20)$$

定理 12 ((μ, ν) -多項係数と Tsallis エントロピー S_q の関係) n が十分大きいとき, (μ, ν) -多項係数の μ -対数は Tsallis エントロピー (16) に一致する.

$$\frac{1}{\nu} \ln_{\mu} \left[\begin{array}{c} n \\ n_1 \quad \dots \quad n_k \end{array} \right]_{(\mu, \nu)} \simeq \begin{cases} \frac{n^q}{q} \cdot S_q \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right) & \text{if } q \neq 0 \\ -S_1(n) + \sum_{i=1}^k S_1(n_i) & \text{if } q = 0 \end{cases} \quad (21)$$

ただし, $\nu \neq 0$,

$$\nu(1 - \mu) + 1 = q, \quad (22)$$

S_q は Tsallis エントロピー (16) で, $S_1(n) := \ln n$.

ここで重要なのは, (22) である (これを著者は, (μ, ν, q) 対と呼んでいる). ν の値によって, (21) は, 次のような典型的な 4 つの数理構造を特別な場合として含んでいることがわかる.

1. **加法的双対性**: $\nu = 1$ のとき, (μ, ν, q) 対 (22) より, μ は次のように与えられる.

$$\mu = 2 - q. \quad (23)$$

したがって, このとき, (21) は,

$$\ln_{2-q} \left[\begin{array}{c} n \\ n_1 \quad \dots \quad n_k \end{array} \right]_{2-q} \simeq \frac{n^q}{q} \cdot S_q \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right) \quad (24)$$

となる. これは, (15) において q と $2 - q$ を入れ替えたときの式に一致する. つまり, 加法的双対性 $q \leftrightarrow 2 - q$ を表す.

2. **乗法的双対性**: $\nu = q$ のとき, (μ, ν, q) 対 (22) より, μ は次のように与えられる.

$$\mu = \frac{1}{q}. \quad (25)$$

したがって, このとき, (21) は,

$$\ln_{\frac{1}{q}} \left[\begin{array}{c} n \\ n_1 \quad \dots \quad n_k \end{array} \right]_{(\frac{1}{q}, q)} \simeq n^q \cdot S_q \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right) \quad (26)$$

となり, 乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ を表す. つまり, q と $\frac{1}{q}$ を入れ替えても式は成り立つ.

3. **q -トリプレット**: $\nu = 2 - q$ のとき, (μ, ν, q) 対 (22) より, μ は次のように与えられる.

$$\mu = \frac{3 - 2q}{2 - q}. \quad (27)$$

したがって, (21) は,

$$\frac{1}{2 - q} \ln_{\frac{3-2q}{2-q}} \left[\begin{array}{c} n \\ n_1 \quad \dots \quad n_k \end{array} \right]_{(\frac{3-2q}{2-q}, 2-q)} \simeq \frac{n^q}{q} \cdot S_q \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right) \quad (28)$$

となる. このとき, (μ, ν, q) 対 (22) は, Tsallis によって予想されていた q -トリプレット ($q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}, q_{\text{stat}}$) と一致する [9][7].

4. マルチフラクタル-トリプレット: $\nu = \frac{1}{q}$ のとき, (μ, ν, q) 対 (22) より, μ は次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-\mu} = \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}. \quad (29)$$

この関係は, 近年, Tsallis らによって理論的に求められていた

$$\frac{1}{1-q_{\text{sen}}} = \frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}} \quad (30)$$

に酷似している [10]. ここで, $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$ ($\alpha_{\min} < \alpha_{\max}$) は, マルチフラクタルの理論に現れる $f(\alpha)$ スペクトラムにおいて, $f(\alpha) = 0$ を満たす 2 つの α である. (29) と (30) を比べればわかるように, (30) を $\alpha_{\max} - \alpha_{\min} = 1$ を満たすように α をリスケールすると, (29) と一致する. そのとき, (μ, ν, q) 対 (22) は, $q_{\text{sen}}, \alpha_{\max}$ と次の意味で一致する.

$$\mu = q_{\text{sen}}, \quad \nu = \frac{1}{\alpha_{\max}}, \quad q = \alpha_{\max} \quad (31)$$

この (31) を q -トリプレット $(q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}, q_{\text{stat}})$ と区別するために, 著者らはマルチフラクタル-トリプレットと呼んでいる [7].

以上, 非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ だけから Tsallis エントロピーを導き, しかも, Tsallis 統計力学における代表的な 4 つの数理構造が自然に導かれることがわかった. このなかでも, 特に後者の 2 つは, 物理的に重要な応用をもつことは, その名称から容易に想像できるであろう.

3 Tsallis 自身による Tsallis エントロピーの導出 (1988)

Tsallis 統計力学が始まった 1988 年の論文 [8] の 1 ページ目に, マルチフラクタルを背景にして, Tsallis エントロピー (16) が提案されており, そこには, どのようにして導いたのか書かれていない. しかし, 2004 年の書籍 [3] の p.9 の半ページに, Tsallis 本人が当時使った直観的な方法を述べている. そこで, 原点回帰の意味も含めて, 創始者本人がどのように考えて, Tsallis エントロピーを導いたのかを [3] の p.9 をもとに, その導出方法を簡潔にまとめておく.

確率 $0 < p_i < 1$ と $q > 0$ に対して, 次の関係は容易にわかる.

$$p_i^q < p_i \quad (q > 1), \quad (32)$$

$$p_i^q = p_i \quad (q = 1), \quad (33)$$

$$p_i^q > p_i \quad (q < 1). \quad (34)$$

これらの関係より, エントロピーの定式化に “bias” を導入することを考える. 具体的には, p_i を用いるのではなく, p_i^q をエントロピーの定式化に用いることにする². エントロピー $S_q(p_1, \dots, p_n)$ は, p_i の置換に対して不変であることを要請すると, その要請を満たす最も簡潔なエントロピー S_q の形式は,

$$S_q(p_1, \dots, p_n) = f\left(\sum_{i=1}^n p_i^q\right) \quad (35)$$

である. ここで, f は微分可能な関数とする. その最も簡単な形は 1 次関数であり, そのとき, ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$S_q(p_1, \dots, p_n) = a + b \sum_{i=1}^n p_i^q \quad (36)$$

²これは, 実際のところ, マルチフラクタルの分野で p_i^q が頻出するためと考えた方がよいであろう.

と書ける。ここで、上の定式化において、次の特別な場合を考える。

$$p_i = \begin{cases} 1 & i = i_0 \text{ のとき,} \\ 0 & i \neq i_0 \text{ のとき.} \end{cases} \quad (37)$$

このとき、エントロピー S_q は $S_q = 0$ になることを要請すると、 $a + b = 0$ 。よって、

$$S_q(p_1, \dots, p_n) = a \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i^q \right). \quad (38)$$

さらに、 $q \rightarrow 1$ のとき、エントロピー S_q は、Shannon エントロピーに一致することを要請すると、

$$p_i^q = p_i p_i^{q-1} = p_i \exp[(q-1) \ln p_i] \quad (39)$$

より、 $q \rightarrow 1$ のとき、

$$p_i^q \simeq p_i [1 + (q-1) \ln p_i] \quad (40)$$

が成り立つ。ここで、 $|x| \ll 1$ のとき、 $\exp(x) \simeq 1 + x$ を使った。これを (38) に代入すると、

$$S_1(p_1, \dots, p_n) = -a(q-1) \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (41)$$

であるから、Shannon エントロピーと比較して、 $a(q-1) = 1$ 。つまり、

$$a = \frac{1}{q-1} \quad (42)$$

と定まる。したがって、(38) より、一般化エントロピー $S_q(p_1, \dots, p_n)$ として、Tsallis エントロピー (16) を得る。

これよりわかるように、1988 年当時、かなり直観的に Tsallis エントロピー (16) を導いていたことがわかる。しかし、その背後には、前章まで述べてきたように、基本的な非線形微分方程式 (1) から直接的に導かれる一般化エントロピーであることが最近になってわかってきた。

4 Tsallis エントロピーからマルチフラクタルへ

前章の 1988 年の Tsallis エントロピーの導入では、マルチフラクタルの定式化に頻出する確率の q 乗 (p_i^q) を一般化エントロピーの定式化に使うことが発端であったことが読み取れる。フラクタルやマルチフラクタルで、最も重要な特徴は、対象となる系の次元が非整数次元であることである。実際、マルチフラクタルについて様々な文献を調べると、必ず現れるのが次の一般化次元 D_q である。

定義 13 (一般化次元) 与えられた $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 A を直径 $d(U) = \varepsilon$ の $U \subset \mathbb{R}^n$ で被覆したときの数を $n(\varepsilon)$ とする。また、集合 A から N 個の点 $\{x_k : k = 1, \dots, N\}$ を取り出し、先の i 番目の被覆に入る x_k の数を N_i とする。このとき、確率

$$p_i := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (i = 1, \dots, n(\varepsilon)) \quad (43)$$

に対して、

$$D_q := -\frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q}{\ln \varepsilon} \quad (44)$$

を A の一般化次元という。

この定義において、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $n(\varepsilon) \rightarrow \infty$ であることに注意する必要がある。この一般化次元において、特に、 $q = 0, 1, 2$ のときは、それぞれ容量次元、情報次元、相関次元を表し、いわゆるカントール集合やコッホ曲線のような図形のフラクタル次元は、容量次元のことを指す。この一般化次元 D_q は、Tsallis エントロピーが導入された 1988 年当時まで、Rényi エントロピー：

$$S_q^{\text{Rényi}}(p_1, \dots, p_n) := \frac{\ln \sum_{i=1}^n p_i^q}{1-q} \quad (45)$$

との関係がよく知られていた [11]。Rényi エントロピー $S_q^{\text{Rényi}}$ と Tsallis エントロピー S_q^{Tsallis} の両者の定式化には $\sum_{i=1}^n p_i^q$ が含まれ、非常に似ている。実は、 $\varepsilon (> 0)$ が十分小さいとき、これらの間には、次のような関係がある。

定理 14 (一般化次元と Rényi エントロピーと Tsallis エントロピーの関係) $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、次が成り立つ。

$$\exp(S_q^{\text{Rényi}}(p_i)) = \exp_q(S_q^{\text{Tsallis}}(p_i)) = \exp_{\frac{1}{q}}\left(S_{\frac{1}{q}}^{\text{Tsallis}}(P_i)\right) \simeq \varepsilon^{-D_q} \quad (46)$$

ここで、 P_j は p_i のエスコート分布で、

$$P_j := \frac{p_j^q}{\sum_{i=1}^n p_i^q} \quad (47)$$

で定義される。

エスコート分布が現れるときは、乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ が存在することが多い。実際、(46) の 2 番目の等号もまた乗法的双対性の表現の 1 つである。また、エスコート分布は、ここで見たようにマルチフラクタルに特徴的に現れ [12]、Tsallis 統計の定式化では、期待値の定義に使われることが多い [13]。

この関係式 (46) からわかるように、今まで述べてきた Tsallis エントロピー S_q^{Tsallis} の q は、一般化次元 D_q の q に他ならない。また、(46) の関係式は、1910 年の Einstein の論文 [14] で、Boltzmann の式 $S = k_B \ln W$ を逆さまにした $\exp(S/k_B) = W$ の一般化に対応していることがわかる [15]。

5 おわりに

本論文で述べてきたことを簡潔に書くと、次のように表すことができる。記号 $\Rightarrow$ の意味は、 $A \Rightarrow B$ は、 A から B を導くことができるという意味である。

$$\frac{dy}{dx} = y^q \Rightarrow q\text{-対数関数}, q\text{-指数関数} \quad (48)$$

$$\Rightarrow q\text{-積}, q\text{-スターリングの公式}, q\text{-多項係数} \quad (49)$$

$$\Rightarrow \text{Tsallis エントロピー } S_q \quad (50)$$

$$\Rightarrow q\text{-トリプレット, マルチフラクタル-トリプレット} \quad (51)$$

$$\Rightarrow \text{一般化次元 } D_q \quad (52)$$

これよりわかるように、非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ だけを出発点にして、マルチフラクタルの理論が非常に自然な形で展開できることがわかる。上記の流れは、Tsallis 統計力学の背景にある数理の骨子となる部分であるが、上記以外にも、すでに次のような結果が得られている。

1. 非加法的エントロピーに対する公理系と一意性定理 [16]
2. Tsallis 統計力学における誤差法則 [17]
3. Tsallis エントロピー S_q を最大化する確率分布の一意な表現の導出 [18]

4. Tsallis エントロピー S_q を平均符号長を下限にもつ符号木の導出 [19]

特に、上の 2 番目の誤差法則は、ガウス分布の拡張として q -ガウス分布が得られ、この q -ガウス分布は、Cauchy 分布、 t -分布など、代表的なべき分布を特別な場合として含む。べき分布が現れる物理現象は様々な存在するが、本稿から Tsallis 統計力学が説明できる範囲は、マルチフラクタルに限られているという点に注意すべきであろう。また、数学から見れば、エルゴード理論・大偏差原理などへの展開など、まだ課題は多い。

参考文献

- [1] H. Suyari and T. Wada, Scaling property and Tsallis entropy derived from a fundamental nonlinear differential equation, Proc. of the 2006 Inter. Sym. on Inform. Theory and its Appli. (ISITA2006), pp.75-80, 2006. [LANL e-print cond-mat/0608007]
- [2] C. Tsallis et al., Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, edited by S. Abe and Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).
- [3] C. Tsallis et al., Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, edited by M. Gell-Mann and C. Tsallis (Oxford Univ. Press, New York, 2004).
- [4] L. Nivanen, A. Le Mehaute, Q.A. Wang, Generalized algebra within a nonextensive statistics, Rep. Math. Phys. 52, 437-434, 2003.
- [5] E.P. Borges, A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics, Physica A 340, 95-101, 2004.
- [6] H. Suyari, M. Tsukada and Y. Uesaka, Mathematical structures derived from the q -product uniquely determined by Tsallis entropy, Proc. of the 2005 IEEE Inter. Sym. on Inform. Theory (2005IEEE-ISIT), pp.2364-2368, 2005.; H. Suyari, Mathematical structure derived from the q -multinomial coefficient in Tsallis statistics, Physica A, vol.368, pp.63-82, 2006.
- [7] H. Suyari and T. Wada, Multiplicative duality, q -triplet and (μ, ν, q) -relation derived from the one-to-one correspondence between the (μ, ν) -multinomial coefficient and Tsallis entropy S_q , Physica A, vol. 387, 71-83, 2008.
- [8] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, J.Stat.Phys. vol.52, pp.479-487, 1988.
- [9] C. Tsallis, M. Gell-Mann and Y. Sato, Asymptotically scale-invariant occupancy of phase space makes the entropy S_q extensive, Proc.Natl.Acad.Sciences, vol.102, 15377-15382, 2005.
- [10] M. L. Lyra and C. Tsallis, Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems, Phys.Rev.Lett. vol.80, 53-56, 1998.
- [11] P. Grassberger, Generalized dimension of strange attractors, Phys.Lett.A, vol.97, 227-229, 1983.
- [12] 長島弘幸, 馬場良和, カオス入門, 培風館, 1992.
- [13] C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino, The role of constraints within generalized nonextensive statistics, Physica A, vol.261, 534-554, 1998.
- [14] A. Einstein, Theorie der Opaleszenz von homogenen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Zustandes, Annalen der Physik, vol.33, 1275-1298, 1910.

- [15] 須鎔弘樹, Tsallis 統計力学の背景と新展開, 日本物理学会誌, vol.63, no.6, pp.450-454, 2008.
- [16] H. Suyari, Generalization of Shannon-Khinchin axioms to nonextensive systems and the uniqueness theorem for the nonextensive entropy, IEEE Trans. Inform. Theory, vol.50, pp.1783-1787, 2004.
- [17] H. Suyari and M. Tsukada, Law of error in Tsallis statistics, IEEE Trans. Inform. Theory, vol.51, pp.753-757, 2005.
- [18] H. Suyari, The unique non self-referential q -canonical distribution and the physical temperature derived from the maximum entropy principle in Tsallis statistics, Prog. Theor. Phys. Suppl., vol.162, pp.79-86, 2006.
- [19] H. Suyari, Tsallis entropy as a lower bound of average description length for the q -generalized code tree, Proceedings of 2007 IEEE International Symposium on Information Theory (2007IEEE-IST), pp.901-905, 2007.