

集合論 Z_f の Topos への Interpretation

九大工学部 倉田令二郎

0. はじめに

1° Topos における高階直観主義論理の展開でききといた
 たく知られた結論として、Mitchel Bénabou Language とその internal
 interpretation といた形式で $\beta 1 \sim \beta 3$ で与えられる。若干異なるやり
 方（たとえば竹内「層、圏、トポス」）とあるが本質的に同一である。

2° transitive set object ($\beta 5$) による古典的集合論 Z_f の Weil pointed
 Topos における解釈は G. Osiris の論文 (J. Pure and Applied Alg.
 4 (1974) 79-119) によって与えられる。

3° $\beta 4$ の結果と G. Osiris の結果 (Cahiers top et géom.

diff. XV (1974) 157-180) とあるが今回はとり上げない。

4° 本論文は直観主義的集合論 Z_f の一般の Topos における解釈を
 与えようとするもので、internal & external の混合型である。

5° ことに Z_f は extensionality, pair, sum, power
 restricted separation および変形した regularity とを系として
 付加的に A.T. (axiom of transitivity) のもとで考察される。

あるとき、 t に次の形の $\mathcal{E}$ の map $|t|$ を対応させる。

$$|t|: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow A$$

formula は type Ω の term と対応させる。

具体的にこれは "定義" と "証明" である。

2.1 term の interpretation

a) x は type X の variable とする。

$$|x|: X \xrightarrow{1_X} X$$

b) t は type X の term, f は function $X \xrightarrow{+} Y$ とする。

$$|t|: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow X \text{ とする。 } |f(t)| \text{ は}$$

$$|f(t)|: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow X \xrightarrow{+} Y$$

c) τ は略して τ は type X の term, σ は type Y の term とする。順序対 $\langle \tau, \sigma \rangle$ は type $X \times Y$ の term とする。

τ は type $U_1, \dots, U_n$ の相異なる variable $u_1, \dots, u_n$ と σ は type $V_1, \dots, V_m$ の相異なる variable $v_1, \dots, v_m$ とする。 τ は type X の term とする。 σ は type Y の term とする。

$$|\tau|: \prod_{i=1}^n U_i \rightarrow X, \quad |\sigma|: \prod_{i=1}^m V_i \rightarrow Y$$

とする。このとき variable $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m$ の相異なる variable $w_1, \dots, w_p$ とする。

$(w_1, \dots, w_p)$ とする。 $|\langle \tau, \sigma \rangle|$ は

$$|\langle \tau, \sigma \rangle|: \prod_{j=1}^p W_j \rightarrow X \times Y$$

である。ただし上の map は $\prod_{j=1}^p W_j \xrightarrow{\pi} \prod_{i=1}^n U_i \xrightarrow{|\tau|} X$ と

$\prod_{j=1}^p W_j \xrightarrow{\pi'} \prod_{i=1}^m V_i \xrightarrow{|\sigma|} Y$ の product。 $\because W_j$ は variable w_j の type

π, π' は natural projection である。

2.2. formula の interpretation
abstraction

a) $\delta =_X \tau$ δ, τ は type X の term である。

$$|\delta =_X \tau| = \delta_X(|\delta, \tau|) : U \times V \rightarrow \Omega$$

は $\vdash \tau$ を定義する。 $\exists \tau \in \mathcal{L} \mid |\delta| : U \rightarrow X, |\tau| : V \rightarrow X \in \mathcal{L}$

δ_X は下の図に定義する Kronecker の δ -map である。

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \Delta = \langle 1, 1 \rangle & & \downarrow \tau \text{ pull back} \\ U \times V & \xrightarrow{|\delta, \tau|} & X \times X \xrightarrow{\delta_X} \Omega \end{array}$$

b) $\delta \in_X \tau$ δ は type X , τ は type Ω^X の term

$$|\delta \in_X \tau| = \text{ev}_X(|\delta, \tau|)$$

は $\vdash \tau$ $|\delta \in_X \tau|$ を定義する。 $\exists \tau \in \mathcal{L} \mid |\delta| : U \rightarrow X, |\tau| : V \rightarrow \Omega^X$

である。 ev_X は evaluation map: $X \times \Omega^X \xrightarrow{\text{ev}_X} \Omega$ である。

$$\exists \tau \in \mathcal{L} \quad U \times V \xrightarrow{|\delta, \tau|} X \times \Omega^X \xrightarrow{\text{ev}_X} \Omega$$

c) Ω は $\text{map} \quad \wedge, \vee, \rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ と $\text{map} \quad \neg : \Omega \rightarrow \Omega$ による

internal Heyting algebra である。注意しよう。

formula φ, ψ に対して $|\varphi| : U \rightarrow \Omega, |\psi| : V \rightarrow \Omega$ を定義

$$\vdash \tau \in \mathcal{L} \quad |\varphi \wedge \psi| = \wedge \circ |\langle \varphi, \psi \rangle| : U \times V \xrightarrow{|\langle \varphi, \psi \rangle|} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

による。 $\vee, \rightarrow$ にも同じく同様、 $\neg$ は

$$|\neg \varphi| = \neg |\varphi| : U \xrightarrow{|\varphi|} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$$

d) $\forall x \phi(x), \exists x \phi(x), \{x \mid \phi(x)\}$

(z is term, $z \in X$ is 16) ("Type $\tau \neq \perp$ ")

$$3.3. \frac{\psi \rightarrow \varphi(x)}{\psi \rightarrow \forall x \varphi(x)} \quad \frac{\varphi(x) \rightarrow \psi}{\exists x \varphi(x) \rightarrow \psi} \quad (\psi \text{ is variable } x \neq \tau, \tau \neq \perp \dots)$$

restricted modus ponens $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ (φ a variable is $\tau \wedge \psi$ a variable)

is 3.11 $\tau \perp$ is valid in $\mathcal{E}$ is 3.7 τ is valid in $\mathcal{E}$ is 3.2

3.4. extensionality is valid in $\mathcal{E}$

$$\forall x (x \in Y_1 \leftrightarrow x \in Y_2) \leftrightarrow Y_1 =_{\Omega^X} Y_2$$

x is variable of type X , Y_1, Y_2 is variable of type Ω^X .

3.5 equality axiom is valid in $\mathcal{E}$

$$x =_x x' \wedge x' =_x x'' \rightarrow x =_x x''$$

$$x =_x x' \rightarrow (x \in_x Y \rightarrow x' \in_x Y)$$

3.6. comprehension axiom is valid

$$\text{formula } \phi \text{ is 3.7.1. } x \in \{x \mid \phi(x)\} \leftrightarrow \phi(x)$$

(3.1) 3.6.1. pair $\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}$

$$x, y, z \text{ is 16) ("Type } X \text{ is variable } |\{x, y\}| : X \times X \rightarrow \Omega^X$$

3.6.2 sum $S(x) = \{z \mid \exists y (z \in y \wedge y \in x)\}$

$$x \text{ is type } \Omega^{\Omega^X}, y \text{ is type } \Omega^X, z \text{ is type } X, |S(x)| : \Omega^{\Omega^X} \rightarrow \Omega^X$$

3.6.3 power $IP(x) = \{z \mid z \subseteq_x x\}$

$$x \text{ is type } \Omega^X, z \text{ is 16) ("Type } X \text{ is variable } |IP(x)| : \Omega^X \rightarrow \Omega^{\Omega^X}$$

4. External interpretation in Well-opened Topos.

4.1. Well-opened Topos

$$\begin{array}{c}
 U \xrightarrow{u} A \\
 \downarrow \text{p.b.} \quad \downarrow \gamma_A \\
 I \xrightarrow{a} \tilde{A}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 = \text{a.e.} \\
 |u \in N|_e : N \cap U \rightarrow A \quad (N \cap U \subset I) \\
 u: U \rightarrow A, v: V \rightarrow A \Rightarrow \text{a } A\text{-element } x \text{ s.t.} \\
 |u=v|_e : U \cap V \rightarrow A \quad (U \cap V \subset I) \\
 \Rightarrow \text{a } A\text{-element } u_1: U_1 \rightarrow A, u_2: U_2 \rightarrow A \Rightarrow \text{a } x \\
 | \langle u_1, u_2 \rangle |_e : U_1 \times U_2 \rightarrow A \times A \quad (U_1 \times U_2 \subset I)
 \end{array}$$

と定義する。

4.3. formula の external interpretation

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ formula, $x_1, \dots, x_n$ type $A_1, \dots, A_n$ ^{variables}
 $\Rightarrow \exists \text{ a } |\phi| : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \Omega, \quad \text{where } \Omega \text{ is a set}$
 $A_1 \times \dots \times A_n$ の sub object $\Rightarrow \|\phi\| \in \mathcal{S}$.

$$a_i: I \rightarrow \tilde{A}_i \quad (\bar{a}_i: U \rightarrow A_i) \Rightarrow \text{a.e.}$$

$$\begin{aligned}
 |\phi(a_1, \dots, a_n)|_e &= |\langle a_1, \dots, a_n \rangle|_e \wedge \|\phi\| \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n \\
 &= |\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in |\phi||_e
 \end{aligned}$$

と定義する。さらに:

$$1^0. |\rightarrow \phi(a_1, \dots, a_n)|_e = |\langle a_1, \dots, a_n \rangle|_e \wedge |\phi(a_1, \dots, a_n)|_e$$

$$2^0. |\phi(a_1, \dots, a_n) \wedge \psi(b_1, \dots, b_m)|_e$$

$$= |\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle|_e \wedge |\phi(a_1, \dots, a_n)|_e$$

$$\wedge |\psi(b_1, \dots, b_m)|_e$$

と定義する。この $\wedge$ は $\text{Sub}(1)$ の演算である。

$$3^0. |\exists x \phi(x, a_1, \dots, a_n)|_e$$

$$= | \langle a_1, \dots, a_n \rangle |_e \wedge \sup_{a: A \text{ element}} (|a| \wedge |\Phi(a, a_1, \dots, a_n)|_e) \\ | \forall x \Phi(x, a_1, \dots, a_n) |_e \\ = | \langle a_1, \dots, a_n \rangle |_e \rightarrow \inf_{a: A \text{ element}} (|a| \rightarrow |\Phi(a, a_1, \dots, a_n)|_e)$$

$\lambda a \vdash \Phi$ の A -element a については

$$| \Phi(a_1, \dots, a_n) |_e = | \langle a_1, \dots, a_n \rangle |_e$$

の $\lambda x \exists \Phi$ は external valid と $\lambda x \exists \Phi$ は

external valid $\Leftrightarrow$ internal valid (Osius)

が成り立つ。

5. transitive set object of a Topos

Topos $\mathcal{E}$ の map $r: A \rightarrow PA$ は A 上の relation と同一視
 $\vdash r$ である。

relation r が extensional とは r が mono $\wedge \vdash r$

r が recursive とは

任意の $PB \xrightarrow{g} B$ に対して、次のように $A \xrightarrow{f} B$ が唯一存在する。

$A \xrightarrow{f} B$ が可換。これは P は $\mathcal{E}$ の A 上の Functor である。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ r \downarrow & & \uparrow g \\ PA & \xrightarrow{Pf} & PB \end{array} \quad \begin{array}{l} N \rightarrow A \text{ of exponential conjugate } \varepsilon \text{ } 1 \xrightarrow{N} PA \\ \text{charac map } A^N \rightarrow \Omega \end{array}$$

$$\exists \lambda \vdash \quad 1 \xrightarrow{N} PA \xrightarrow{Pf} PB \text{ は image } f[N] (= \exists_f(N))$$

に対して $f[N]$ を与える。

r が transitive set object とは extensional recursive $r \wedge \vdash r$ 。

inclusion relation $A \xrightarrow{r} PA$, $B \xrightarrow{s} PB$ に対して

10

4° 任意の 2 つの tr-set object $A \xrightarrow{r} PA$, $B \xrightarrow{s} PB$ に対して
 tr-set object $A \cap B \xrightarrow{rs} P(A \cap B)$, $A \cup B \xrightarrow{r \vee s} P(A \cup B)$ が存在して
inclusion に従って $\inf$, $\sup$ となる。

$$r \wedge s \leq r, s, \quad t \leq r, t \leq s \Rightarrow t \leq r \wedge s$$

$$r, s \leq r \vee s, \quad r \leq t, s \leq t \Rightarrow r \vee s \leq t$$

(注) $\cup, \cap$ は object の subobject となる Heyting algebra

$\text{Sub}(X)$ に $\cup, \cap$ は $\checkmark$ の関係ではない。
(これは)

6. Model of Z_f in a Topos (準備)

6.1 atomic formula of Z_f

以下 τ は $X \xrightarrow{a} A$ ($A \xrightarrow{r} PA$ は tr-set object) の $\#$ の map τ である

$X \xrightarrow{a} A$ ($A \xrightarrow{r} PA$ は tr-set object), $Y \xrightarrow{b} B$ ($B \xrightarrow{s} PB$ は tr-set object)

$$\text{に対して } t = r \vee s: C \rightarrow PC \text{ を } \tau \text{ として } \text{in}(r, r \vee s) = \bar{c} \quad \text{in}(s, r \vee s)$$

$$= \bar{j} \text{ となる } \tau \text{ の } \tau \text{ は } |a=b|, |a \in b| \text{ の } \tau \text{ である。}$$

$$|a=b|: X \times Y \xrightarrow{a \times b} A \times B \xrightarrow{\tau \times j} C \times C \xrightarrow{\delta_C} C$$

$$|a \in b|: X \times Y \xrightarrow{a \times b} A \times B \xrightarrow{\tau \times j} C \times C \xrightarrow{1 \times t} C \times PC \xrightarrow{ev_C} \Omega$$

2 つ定義した internal interpretation τ は τ である。

$$|a=b| = |\tau a(x) = \tau b(y)|_{\tau}$$

$$|a \in b| = |\tau a(x) \in \tau \cdot j \cdot b(y)|_{\tau}$$

6.2 extensionality $X \xrightarrow{a} A$ (tr-set object) $Y \xrightarrow{b} B$ (同)

に対して $\tau \models \forall c (c \in a \leftrightarrow c \in b) \leftrightarrow a = b$ c は type C の variable

$\models$ "1. $c \in a, c \in b \Rightarrow a = b$ の interpretation は 6.1 に $\models$ する。

$\leftrightarrow \forall c$ の interpretation は 2 に $\models$ する。意味 "2" である。(以下同様)

3, 4 は $\models$ する。 $X = C \cup \{ \}$. γ_1, γ_2 は $t \cdot i \cdot a(x), t \cdot j \cdot b(y)$ である。
 1' λ は $\models$ (3, 2 $\models$ 17) である。

$$\mathcal{E} \models \forall c (c \in t \cdot i \cdot a(x) \leftrightarrow c \in t \cdot j \cdot b(y)) \leftrightarrow t \cdot i \cdot a(x) =_{PC} t \cdot j \cdot b(y)$$

($\mathcal{E}$ は t の mono である。 $\models$ する。 $\models$ 17) ... $| \mathcal{E} |$ は $\mathcal{E}$ の map である。

$$| i \cdot a(x) = j \cdot b(y) |_{\mathcal{E}} = \frac{\#}{\#} \text{ (} \models \text{ する。)}$$

6.3 equality

$$\mathcal{E} \models a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$$

$$X \xrightarrow{a} A (A \xrightarrow{r} P_A \text{ tr-set object}), Y \xrightarrow{b} B (B \xrightarrow{s} P_B \text{ tr-set object})$$

$$Z \xrightarrow{c} C (C \xrightarrow{t} P_C \text{ tr-set object})$$

$$(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t) = (r \cup t) \cup s \text{ である inclusion の - 性質}$$

mono に $\models$ する。 6.2 の $\models$ に $\models$ する。 $\models$ する。 (いっただ $r \cup s \cup t$ に $\models$ する。 3.5 $\models$ する。) 同様 $\models$ する。

$$\mathcal{E} \models a = b \rightarrow (a \in c \rightarrow b \in c)$$

6.4 pair $a, b \in j$ は 6.1 $\models$ する。

3.6.1 $\models$ する。 type X の variable x, y は $\models$ する。 $\{x, y\} \in \{x, y\}_X \subseteq \mathcal{P} X$. $| \{x, y\}_X |_{\mathcal{E}} : X \times X \rightarrow \Omega^X = P X$.

$$| \{a, b\} | = | \{ i \cdot a(x), j \cdot b(y) \} |_{\mathcal{E}} \text{ である。}$$

$$\mathcal{E} \models \forall c (c \in \{a, b\} \leftrightarrow c = a \vee c = b) \text{ } c \text{ は type } C \text{ の variable}$$

$$\models \text{ する。 } \mathcal{E} \models \forall c (c \in \{ i \cdot a(x), j \cdot b(y) \} \leftrightarrow c =_{\mathcal{E}} i \cdot a(x) \vee c =_{\mathcal{E}} j \cdot b(y))$$

$$c \text{ かつ } d \text{ である } \vdash |c \stackrel{c}{=} i \cdot a(x)|_c = |c = a|, |c \stackrel{c}{=} j \cdot b(y)|_c = |c = b|$$

6.5 sum $U_X(Y) = \{x \mid \exists z (x \in z \wedge z \in Y)\}$ Y は type PX の variable

$$|U_X|_c = |U_X(Y)|_c : PX \rightarrow PX$$

$\exists a \text{ かつ } \exists X \xrightarrow{a} A (A \xrightarrow{r} PA \text{ tr-set-object}) \text{ である}$

$$|U(a)| = U_A(\text{pr} \cdot r \cdot a(x))$$

$$; X \xrightarrow{a} A \xrightarrow{r} PA \xrightarrow{\text{pr}} PPA \xrightarrow{|U_A|_c} PA \text{ である}$$

$\exists a \text{ かつ } \exists$

$$\mathcal{E} \models \forall a (a \in U(a) \leftrightarrow \exists z (z \in z \wedge z \in a))$$

$\vdash \vdash \vdash a$ は type A の, z は type PA の variable

$$(i) A \xrightarrow{r} PA \text{ tr-set object ならば } PA \xrightarrow{\text{pr}} PPA$$

tr-set-object である

6.6 power Y は type PX の variable

$$|P_X(Y)| = \{z \mid z \subseteq_X Y\}$$

$$|P_X|_c = |P_X(Y)|_c : PX \rightarrow PPX$$

$X \xrightarrow{a} A (A \xrightarrow{r} PA \text{ tr-set object}) \text{ である}$

$$|P(a)| = |P_A(\text{pr} \cdot r \cdot a(x))|_c : X \xrightarrow{a} A \xrightarrow{r} PA \xrightarrow{|P_A|} PPA$$

$\mathcal{E} \models \forall z (z \in P(a) \leftrightarrow z \subseteq a)$ z は var. of type PA

(i) $Y_1 \subseteq_X Y_2$ (Y_1, Y_2 は type PX) は $\forall x (x \in_X Y_1 \rightarrow x \in_X Y_2)$ と同義

1.2 より, $\vdash \vdash |Y_1 \subseteq_X Y_2|_c : PX \times PX \rightarrow \Omega$ と直接に定義する

である。この場合 6.1 と同様に成立する

$$|a \subseteq b| = |t \cdot i \cdot a(x) \subseteq t \cdot j \cdot b(y)|_c \text{ である}$$

7. Model (Interpretation) of Z_1 in a Topos (結論)

7.1 基本方針 Z_1 の formula は "集合" とあるものを variable

$a, b, c, \dots$ は atomic formula $a \in b, a = b$ などの出典として論理記号
($\forall, \exists$) の quantifier の他には、 $\in$ と $=$ のみを用いた bounded quantifier

$\forall x (x \in a) \exists x (x \in a) \rightarrow a$ は set — ($\in$ は $\in$ のみで構成される)

Z_1 の formula の $\mathcal{E}$ における interpretation は

① set-variable は $X \xrightarrow{a} A$ (A は set object) — この形のものは set-object といい、 $\mathcal{E}$ のある set-object の subobject を動かして a とする (a は constant a の全体を考慮する)

② atomic formula $a \in b, a = b$ は $\mathcal{E}$ における $|a \in b|, |a = b|: X \times Y \rightarrow \Omega$ と $\mathcal{E}$ の Ω による定数である。

③ formula φ, ψ は $\mathcal{E}$ における interpretation $|\varphi|, |\psi|$ が定数である。
 $|\varphi \wedge \psi|$ や $|\neg \varphi|$ は 2.2 (c) と (d) により定数である。

④ $\forall x (x \in a) \psi(x) \exists x (x \in a) \psi(x)$ は $\mathcal{E}$ における

a は $\mathcal{E}$ のある type A である。ある $\mathcal{E}$ の object A に対する $\mathcal{E}$ の

2.2 (d) により $|\forall x (x \in a) \psi(x)| = |\forall x \psi(x)|, |\exists x (x \in a) \psi(x)| = |\exists x \psi(x)|$ により定数である。 x は type A の variable。

⑤ non bounded quantifier $\forall a \psi(a), \exists a \psi(a)$ は $\mathcal{E}$ における $|\forall a \psi(a)|, |\exists a \psi(a)|$ は定数である。

($\mathcal{E} \models \forall a \psi(a), \mathcal{E} \models \exists a \psi(a)$ は定数である)

ある任意の a に対して $\exists x \in \mathcal{P}(a)$, $x \cap a = \emptyset$ である。
 $\exists x \in \mathcal{P}(a)$ である $x = x \cap a$ である。

⑤ Axiom of $\mathcal{P}$ 加. そのような interpretation が可能である。
 ように Z_9 は Axiom of transitivity $\in \mathcal{P}$ 加である。

A.T $\forall a \exists b (a \subset b \wedge b \text{ is transitive set})$

ある a に対して $a \subset \tilde{a}$ である transitive set $\tilde{a}$ が存在する。
 かつ $\tilde{a} \cap a = \emptyset$ である。

b is transitive である $x \in b \wedge y \in x \rightarrow y \in b$ である。 $\Rightarrow$
 かつ $\mathcal{P}(b) \rightarrow \mathcal{P}(b)$ である。

これは $\mathcal{P}$ 以下のように Z_9 の公理を書き換える。

これは A.T の $\forall x \exists y$ は $\forall x$ の公理と同値である。

7.2 extensionality pair power sum

$$\forall a \forall b \forall x (x \in (a, b)) (x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b$$

有限個の set $a_1, \dots, a_n$ である transitive set $\tilde{a}$

$(a_1, \dots, a_n) \neq \tilde{a}$ は $(a_1, \dots, a_n) \sim \tilde{a}$ である。

6.1 によつて $\mathcal{P}$ には $\mathcal{P}$ である。

equality axiom 6.3 は問題である。

pair $\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in (a, b)) (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b)$

sum $\forall a \exists c \forall x (x \in \tilde{a}) (x \in c \leftrightarrow \exists z (z \in \mathcal{P}(\tilde{a})) (x \in z \wedge z \in a))$

power $\forall a \exists c \forall z (z \in \mathcal{P}(\tilde{a})) (z \in c \leftrightarrow z \subset a)$

§6 によつて $\mathcal{P}$ には $\mathcal{P}$ である。

$$\text{注1)} \quad \forall a (a \in b \rightarrow a \in b') \rightarrow b \subset b'$$

は $\in$ の性質を証明する。

注2) x is type A の variable x 1. $A \xrightarrow{1_A} A$ に対応する

$$1 \xrightarrow{a'} PA \text{ である } (A \xrightarrow{t_A} \Omega = A \rightarrow 1 \xrightarrow{t} \Omega \text{ の exponential conjugate})$$

$$\text{である } \forall x (x \in a') \psi(x) \leftrightarrow \forall x \psi(x), \exists x (x \in a') \psi(x) \leftrightarrow \exists x \psi(x).$$

は $\in$ の性質を証明する。

注3) power の sum の公理に於いて C は $\in$ の set object である

ことを示す必要がある。

注4) set object $X \xrightarrow{a} A$ のかわりに $1 \xrightarrow{a'} PA$ である。

$$6.5, 6.6 \text{ のかわりに } 1 \xrightarrow{a'} PA \xrightarrow{Pr} PPA \xrightarrow{|U|} PA, 1 \xrightarrow{a'} PA \xrightarrow{|P|} PPA$$

である。このとき $U(a')$ が set object になることは

自明である。 $1 \xrightarrow{a'} PA \xrightarrow{P} PPA$ は r に x の image $r(x)$:

$X \rightarrow A \rightarrow PA$ に対応する $r(x)$ である (functor P の性質!)

7.3 restricted separation

高階直観論の comprehension axiom (IF) である。 Z_1 は

finitely axiomatizable である。各 axiom に対して a に対して a の解がある。

高階直観論の axiom は $a \times b$ の存在, $a - b$ の存在。

$$\{ \langle x_1, x_2 \rangle \mid \langle x_2, x_1 \rangle \in a \} \text{ の存在, } \{ \langle x, y \rangle \mid x \in y \wedge y \in a \} \text{ の存在}$$

$$\{ y \mid \exists x (\langle y, x \rangle \in a) \} \quad \{ \langle \langle z, x \rangle, y \rangle \mid \langle \langle x, y \rangle, z \rangle \in a \} \text{ の存在 である。}$$

7.4. regularity a is transitive set, $b \in b \subset a$ である。

$$\forall x (x \in a) (x \in b \rightarrow x \in b) \rightarrow b = a$$

の形に成立つ。

$$\forall x (r(x) \in b \rightarrow x \in b) \rightarrow b = a$$

よ $x : \text{type } A$ a variable $a : 1 \rightarrow PA (A \xrightarrow{!} A \text{ 対応})$ $b : 1 \rightarrow PA (X \rightarrow A$

に対応) に対して成立つか $r(x) = x$ とおきかえれば成立つ。

内容としては Transitive set a 上で超限帰納法が成立つ (= 2.4.1)。