

神 經 方 程 式 (Ⅱ)

早大理工 大 貫 信

(9 月 2 1 日 受 理)

§ 1 序 論

統計力学的機能という名の下で、脳の研究に対する新しい理念を提案した。“神経力学”は厳密性に欠けるという御指摘があった。この“神経方程式”のシリーズはその解決を目指すものである。(Ⅰ)では、神経力学の数学的定式化を求める際の基本的問題を同定した。神経細胞の発火の特異性によって生じる時間微分不可能性が原因となって従来は差分方程式が避け得られなかった。このことは情報処理理念としてアナログ性の定式化に困難を持たらす。これに関する基本問題として、(Ⅰ)では量子時間の存在が避けられないことを示し、デジタル方程式を書いた。それに引続く問題は量子時間の持つデジタル性と後シナプス電位 (P S P) に見られるアナログ処理の対立を克服することであり、多体系としての神経系の情報処理形式へ向う理論展開である。(Ⅱ)ではこの問題の解決を目指す。

§ 2 アナログ基礎運動方程式

神経の興奮を記述する際に二通りの量の把握の仕方がある。一つは神経の発火に着目し、興奮を1か0でとらえる (σ 空間)。他の一つは、後シナプス電位の大きさでとらえる (ν 空間)。 σ 空間は離散的であり、 ν 空間は連続的である。実際の神経は、これら二つの空間への射影をとりつつ興奮の伝播が行われる。McCulloch and Pitts や Caianiello の表示は σ 表示である。実際は $\sigma - \nu$ の複合空間である。しかし量子時間の存在によってデジタル化は避けられない。従って P S P 連続性を取り込む為に量子化雑音を導入する。量子時間によって生ずる雑音は連続量 P S P をパルス近似する時の雑音の他にもっと主要な役割を果たす雑音がある。時間を量子化するということは、多体系に於ては、すべての細胞の発火や伝達を同期化することに通じる。しかしこれは不自然な仮定である。ある絶対時間を取って、すべてを同期化してみる時に

は、それだけの時間量子化の雑音が生じる。今 t と $t + \Delta t$ の間に到達した信号を $t + \Delta t$ に到達するものと見なすことによって時間量子化に伴う雑音を生じる。その時 PSE は時間的に連続である故に、その雑音分布は巾を持つ。このように、神経の状態を σ 空間でとらえる時さらにシナプスでの処理を取り込むには、 ν 表示に於ける連続性を σ 表示 + 量子化雑音としてとらえ、 $\sigma - \nu$ 複合空間を形成する。この後者の時間量子化雑音は前者の単なるパルス近似の雑音とくらべると、大きく分布は広いと見なせるので、前者を無視して後者を取り入れる。その雑音分布を定常的であるとして図1のように設定することは妥当であろう。というのは、この雑音を ϵ_i とし、ディジタル方程式

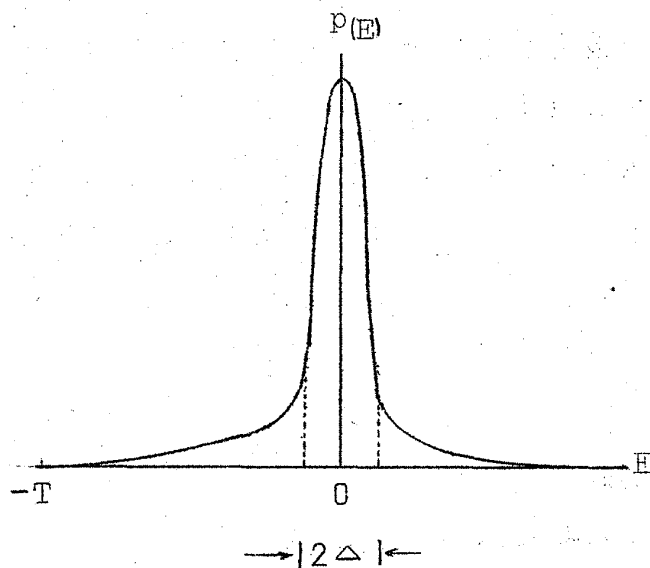


図1 時間量子化雑音分布

(1, 2.7) に於て $\sigma \rightarrow \sigma + \epsilon$ と置換することによって

$$\nu_i'(t + \Delta t) = \nu_i(t + \Delta t) + \epsilon_i(t) \quad (2.1)$$

但し

$$\begin{aligned} \nu_i(t + \Delta t) &= b(\Delta t) \nu_i(t) (1 - \sigma_i(t)) + \sum_{j \neq i} a_{ij} \sigma_j(t - \tau_{ij}) \\ &\quad - T_i + b(\Delta t) T_i (1 - \sigma_i(t)) + T h_i(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$E_i(t) = -b(\Delta t) \nu_i(t) \varepsilon_i(t) - b(\Delta t) T_i \varepsilon_i(t) + \sum_{j \neq i} a_{ij} \varepsilon_j(t) + \Delta T h_i(t) \quad (2.3)$$

となる。 $\Delta T h_i(t)$ は発火の時間間隔が $T h_i(t)$ の緩和時間に比べて大きいとして無視する。量子化雑音 $E_i(t)$ の第一, 第二項は $-T$ から 0 まで分布し, 第三項は, Δt 時間に到達する刺激が弱く, 発火には時間加重を必要とする時は, 0 付近に分布しこれらが時間的に重なる確率は小さいから, 長時間平均で見ると図 1 のように, 0 付近にピークを持ち $-T$ まで広がる分布となる。発火の特異性を記述する関係は (I) では

$$\sigma_i(t) = \theta[\nu_i(t)]$$

であったが, ここでは

$$\sigma_i(t) = \theta[\nu_i(t) + E_i] \quad (2.4)$$

である。但し雑音は定常的とする。

$\sigma - \nu$ 複合空間を η 空間として, 新しい量として η_i が次のように考えられる。

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_i(t) p(E_i) dE_i \\ &= P(\nu_i(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

但し

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$$

η_i は図 2 のようになる。

この時, (2.2) の σ はすべて η になっているはずであるから, (2.5) の ν は正確には $\tilde{\nu}$ として

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_i(t+\Delta t) &= b(\Delta t) \tilde{\nu}_i(t) (1-\eta_i(t)) + \sum_{j \neq i} a_{ij} \eta_j(t-\tau_{ij}) \\ &\quad - T_i + b(\Delta t) T_i (1-\eta_i(t)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となり (2.5) は

$$\eta_i(t) = P(\tilde{\nu}_i(t)) \quad (2.7)$$

である。これはアナログ基礎運動方程式である。

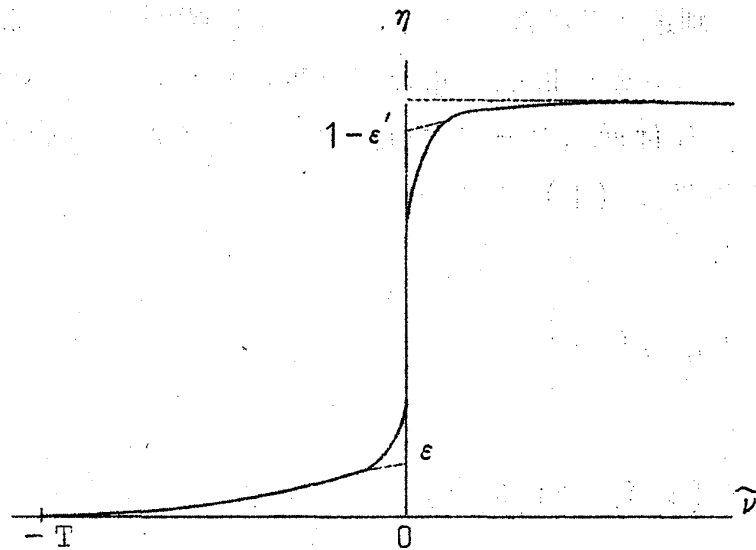


図2 アナログ発火曲線

§3 確率方程式

相互作用が弱い時, $P(\tilde{\nu})$ の立上り巾 Δ は小さい。このような時 $P(\tilde{\nu})$ を図2のように近似出来る。即ち線型部分と階段函数とに分れる。階段函数に線型部分が付加されたこの応答関係は $\tilde{\nu}$ の変化 $\Delta\tilde{\nu}$ を η の変化 $\Delta\eta$ に射影する特徴を持つ。

$$(i) \Delta\eta(t) = k\Delta\tilde{\nu}(t) \quad \text{for } \tilde{\nu}(t) < 0, \tilde{\nu}(t+\Delta t) < 0$$

$$(ii) \Delta\eta(t) = (1-\epsilon'-\epsilon) + (k'-k)\tilde{\nu}(t) + k'\Delta\tilde{\nu}(t) \\ \text{for } \tilde{\nu}(t+\Delta t) > 0$$

$$(iii) \Delta\eta(t) = k\Delta\tilde{\nu}(t) - \{(1-\epsilon'-\epsilon) + (k'-k)\tilde{\nu}(t)\} \\ \text{for } \tilde{\nu}(t) > 0 \quad (3.1)$$

(ii) は発火に伴うジャンプ, (iii) は消却に伴うジャンプである。(3.1) を一つの式で記述すれば

$$\begin{aligned}\Delta \eta(t) = & k \Delta \tilde{v}(t) + (1-\epsilon'-\epsilon) \{ \theta[\tilde{v}(t+\Delta t)] - \theta[\tilde{v}(t)] \} \\ & + (k' - k) \Delta \tilde{v}(t) \theta[\tilde{v}(t)] \\ & + O_1 + O_2\end{aligned}\quad (3.2)$$

但し

$$\begin{aligned}O_1 = & (k' - k) \tilde{v}(t) \{ \theta[\tilde{v}(t+\Delta t)] - \theta[\tilde{v}(t)] \} \\ O_2 = & (k' - k) \Delta \tilde{v}(t) \{ \theta[\tilde{v}(t+\Delta t)] - \theta[\tilde{v}(t)] \}\end{aligned}\quad (3.3)$$

時刻 t に $\tilde{v} = x$ となる確率を $f(x, t)$ とすると

$$\langle \eta(t) \rangle = \int_0^\infty P(x) f(x, t) dx + \int_{-\infty}^0 P(t) f(x, t) dx$$

$$x > 0 \text{ で } P(x) = k' x + (1 - \epsilon')$$

を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty P(x) f(x, t) dx = & (1 - \epsilon') \int_0^\infty f(x) dx \\ & + k' \int_0^\infty x f(x) dx \\ k' \int_0^\infty x f(x) dx \simeq & k' \Delta \int_0^\infty f(x) dx < k' \Delta\end{aligned}\quad (3.4)$$

でこれを無視すると

$$\int_0^\infty P(x) f(x, t) dx = (1 - \epsilon') \langle \theta[\tilde{v}(t)] \rangle$$

又

$$\int_{-\infty}^0 P(x) f(x, t) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{-\infty}^0 P(x) \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0, t) dx$$

大貫 信

$x < 0$ で $P(x) = kx + \epsilon$

$$k = \frac{\epsilon}{T}$$

を用いると

$$\int_{-\infty}^0 P(x) f(x, t) dx = \frac{\epsilon}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-T)^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n)}(0, t)$$

ここで次のことに着目する。

$\tilde{v} = 0$ 付近で, $\tilde{v} < 0$ 側のものは Δt 後に $\tilde{v} > 0$ に移ることによって発火を持たらす。発火寸前にある細胞体に発火を持たらす刺激が平均として Δ の大きさであるとする, それは Δt 時間内の増分 $\langle \Delta \tilde{v} \rangle$ にも等しい。このことから, 発火寸前にある状態を確率的に

$$f(0, t) \Delta = \langle \theta[\tilde{v}(t + \Delta t)] \rangle \quad (3.5)$$

と考えることが出来, 又

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \Delta &= \frac{f(0, t) - f(-\Delta, t)}{\Delta} \cdot \Delta \\ &= \frac{1}{\Delta} \{ \langle \theta[\tilde{v}(t + \Delta t)] \rangle - \langle \theta[\tilde{v}(t + 2\Delta t)] \rangle \} \\ &\simeq -\frac{\Delta t}{\Delta} \frac{d}{dt} \langle \theta[\tilde{v}(t + \Delta t)] \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

とすることが出来る。

従って

$$\int_{-\infty}^0 P(x) f(x, t) dx = \frac{\epsilon T}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{T \Delta t}{\Delta} \right)^n \frac{d^n}{dt^n} \langle \theta[\tilde{v}(t + \Delta t)] \rangle$$

又細胞体の発火の時間間隔は平均として $\frac{T \Delta t}{\Delta}$ であるから, スパイク振動数は

$$\nu_S = \frac{1}{\frac{T \Delta t}{\Delta}}$$

である。今 $\langle \theta[\tilde{v}(t)] \rangle$ の振動数が ν_A であるとする、 n 次の項の寄与は

$$\frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{\nu_A}{\nu_S} \right)^n \langle \theta[\tilde{v}(t)] \rangle$$

である。この理論では $\langle \theta[\tilde{v}(t)] \rangle$ は高々数十 Hz までを扱う (その理由は統計力学的情報処理と筆者が考えている視覚系では入力の変動が高々数十 Hz である)。

一方、 ν_S の方は 100 Hz 以上を考える。これらの条件下で

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 P(x) f(x, t) dx &\simeq \frac{\epsilon T}{\Delta} \left\{ \frac{1}{2} \langle \theta[\tilde{v}(t+\Delta t)] \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{T \Delta t}{\Delta} \frac{d}{dt} \langle \theta[\tilde{v}(t+\Delta t)] \rangle \right\} \end{aligned}$$

と近似すると

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &\simeq \left(1 - \epsilon' + \frac{\epsilon T}{2\Delta} \right) \langle \theta[\tilde{v}(t)] \rangle \\ &\quad + \frac{\epsilon T \Delta t}{2\Delta} \left\{ 1 + \frac{T}{3\Delta} \right\} \frac{d}{dt} \langle \theta[\tilde{v}(t)] \rangle \end{aligned}$$

従って

$$\langle \theta[\tilde{v}(t+\Delta t)] \rangle = \frac{1}{1 - \epsilon' + \frac{\epsilon T}{2\Delta}} \int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}(t-s)} \langle \eta(s) \rangle ds$$

但し

$$\alpha = \frac{\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{T \Delta t}{\Delta} \right) \left\{ 1 + \frac{T}{3\Delta} \right\}}{1 - \epsilon' + \frac{\epsilon T}{2\Delta}} \quad (3.7)$$

$\epsilon \ll 1$ の時は、 $\nu_S \simeq 100 \sim 300$ Hz で

$$\alpha < \Delta t$$

であるから

$$\langle \theta[\tilde{v}(t)] \rangle \simeq \frac{1}{1 - \epsilon' + \frac{\epsilon T}{2\Delta}} \langle \eta(t) \rangle \quad (3.8)$$

又 $\nu_S \simeq 300$ 以上では $\int_{-\infty}^0 P(x) f(x, t) dx$ は $n=0$ までの展開で十分近似でき同様の結果を与える。

(3.3) から

$$\begin{aligned} \langle 0_1 \rangle &\simeq (k' - k) \Delta \cdot \Delta \langle \theta[\tilde{\nu}(t)] \rangle < (k' - k) \Delta \\ \langle 0_2 \rangle &\simeq (k' - k) \Delta \cdot \Delta \langle \theta[\tilde{\nu}(t)] \rangle < (k' - k) \Delta \end{aligned} \quad \} \quad (3.9)$$

であるから

$$(k' - k) \Delta \langle 0(\epsilon^2) \rangle \quad (3.10)$$

の時はこれらを省略出来る。(3.2) (3.8) から

$$\Delta \langle \tilde{\nu}(t) \rangle = m T \Delta \langle \eta(t) \rangle \quad (3.11)$$

但し

$$m = \frac{\epsilon + \tilde{\epsilon}}{(1 - \epsilon' + \tilde{\epsilon}) \epsilon} \quad (3.12)$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon T}{2\Delta} \quad (3.13)$$

$$k = \frac{\epsilon}{T} \quad (3.14)$$

$\langle \eta(t) \rangle = 0$ のとき $\langle \tilde{\nu}(t) \rangle = -T$ であるから

$$\langle \tilde{\nu}(t) \rangle = m T \langle \eta(t) \rangle - T \quad (3.15)$$

(2.6) より

$$\begin{aligned} \Delta \langle \tilde{\nu}_i(t) \rangle &= -\frac{\Delta t}{\tau_i} \tilde{\nu}_i(t) - b(\Delta t) \tilde{\nu}_i(t) \eta_i(t) \\ &\quad + \sum_{j \neq i} a_{ij} \eta_j(t - \tau_{ij}) - \frac{\Delta t}{\tau_i} T_i \\ &\quad - b(\Delta t) T_i \eta_i(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.14) (3.17) (3.18) から

$$\tau_i \frac{\Delta \langle \eta_i(t) \rangle}{\Delta t} = - \langle \eta_i(t) \rangle - \frac{b(\Delta t) T_i}{\Delta t} \langle \eta_i(t)^2 \rangle + \frac{1}{mT} \frac{\tau_i}{\Delta t} \sum_{j \neq i} a_{ij} \langle \eta_j(t - \tau_{ij}) \rangle \quad (3.17)$$

$$\tau_i \frac{d}{dt} \langle \eta_i(t) \rangle = - \langle \eta_i(t) \rangle - \frac{b(\Delta t) \tau_i}{\Delta t} \langle \eta_i(t)^2 \rangle + \frac{1}{mT} \frac{\tau_i}{\Delta t} \sum_{j \neq i} a_{ij} \langle \eta_j(t - \tau_{ij}) \rangle \quad (3.18)$$

$\langle \eta_i^2(t) \rangle \approx \langle \eta_i(t) \rangle$ で近似すれば

$$\Delta t \frac{d}{dt} \langle \eta_i(t) \rangle = - \langle \eta_i(t) \rangle + \frac{1}{mT} \sum_{j \neq i} a_{ij} \langle \eta_j(t - \tau_{ij}) \rangle \quad (3.19)$$

これは

$$\langle \eta_i(t + \Delta t) \rangle = \frac{1}{mT} \sum_{j \neq i} a_{ij} \langle \eta_j(t - \tau_{ij}) \rangle \quad (3.20)$$

とあらわすことも出来る。(3.20)は“神経力学”(I)の(3.9)に相当するものと考えて頂いてよい。(3.9)の導出はこのように訂正したい。神経力学(II)以後の議論はこれにもとづいてそのまま通用する。

§ 4 考 察

(3.19)の形から判るように、神経素子を Ising spin と見なして Master equation を仮定してよさそうである。分布函数として脳をとらえることによって開ける道は大きい。例えば言語機能にとって本質的な問題であるところのイメージの発生は分布函数の空間では容易に想像がつく。統計力学的扱いの特徴は、脳の種々の機能を統計力学言語で把握することによって概念の間のアナロジーを発見出来るのではなかろうかということであるが、その例として本稿のような扱いによって、(3.19)の T (閾値) が統計温度になることがあげられる。神経力学(II)でも述べたように非加重型雑音(雑音のうち時間加重されないと見なし得るもの; r_{non})は閾値と同じような役割をし

統計温度にくり込まれる。即ち統計温度を T' とすると

$$T' = T - f_{\text{non}}$$

である。但しこの場合非加重型雑音は統計力学に於ける雑音と違って負の温度の役割をする。脳の特定部所に雑音発生部が見つかることすれば、それは温度コントロールの役割を持つことが示唆される。ここでの取り扱いはニューロンに限定したが、それを取りまくグリア細胞群にも将来は言及しなければならない。その役割には多くのことが考えられるが、グリア細胞群を熱浴として扱うことも可能であろう。その時、熱浴は非加重型雑音を生起するであろうから、やはり温度に利いてくる。これらは記憶にも関連する。つまりニューロン間の伝達

率は $\frac{a_{ij}}{m T'}$ であるが、この変化は、一つは Caiàniello が記憶方程式として

提唱したように a_{ij} が刺激の回数に伴って変化することである。これは短期の記憶と考えられるが、もう一つ T' の変化によることも考えられる。

温度のもつ役割りとして着目したいものに Condensation もある。 T' の減少によって突然起る Condensation は脳の内部だけでのある種のエントロピーの減少（発想）に関連するかもしれない。このような高等な機能に関しては数式の上からはいろいろ語れるが、残念ながら生理学的実験が伴わない。今後の実験に統計力学的言語が指針を与えることがあるのではと期待している。