

# Riesz bundle について

富山大理 平野正え (Masayuki Hiramono)

富山大理 久保文夫 (Fumio Kubo)

1. Introduction. 考える Banach space は全て無限次元, 複素のものとする. Banach space  $X$  上の bounded linear operator 全体のつくる Banach algebra を  $B(X)$  で表わす.  $B(X)$  の中の compact operator 全体のつくる closed two sided ideal を  $C(X)$  で,  $B(X)$  の  $C(X)$  による quotient algebra を  $A(X)$  で表わし, natural homomorphism を  $\pi: B(X) \rightarrow A(X)$  で表わす.

non-zero scalar  $\lambda$  と  $T \in C(X)$  により  $V = \lambda I - T$  と書ける operator  $V$  は Riesz と Schauder と始め多くの人達により研究された. このような operator  $V$  の range  $R(V)$  と kernel  $N(V)$  については, 次のような事実が知られている:

1°  $R(V^k)$ : closed subspace of  $X$  ( $k=1, 2, \dots$ ),

2°  $\text{codim } R(V^k) < \infty$  ( " ),

3°  $\dim N(V^k) < \infty$  ( " ),

4° decreasing chain  $X = R(V^0) \supset R(V) \supset R(V^2) \supset \dots$  は

$\exists m \in \mathbb{N}; R(V^m) = R(V^{m+1}) = \dots$  なる有限性条件をみたす,

5° ascending chain  $\{0\} = N(V^0) \subset N(V^1) \subset N(V^2) \subset \dots$  は

$\exists m \in \mathbb{N}; N(V^m) = N(V^{m+1}) = \dots$  なる有限性条件をみたす.

また  $T \in C(X)$  の spectre  $\sigma(T)$  について次の事実も良く知られている:

6°  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T)$  で  $\sigma(T)$  の accumulation point は 0 しかない.

$V = \lambda I - T$  がこれらの特性を持つ operator  $T$  は, compact operator に限るな. 実際, すべての quasinilpotent operator  $T$  もこれらの特性を持つている. これら 1° ~ 7° の特性をみたす operator  $T$  の class を研究した Ruston はこのような operator を Riesz operator と名付けた. この class の characterization は Ruston を始め数人の人達によって与えられた.

定理 A.  $B(X) \ni T$  が Riesz operator である必要十分条件は, 任意の  $\lambda \neq 0$  に対し  $R(\lambda I - T)$  が closed で

$$\forall \lambda \neq 0; \begin{cases} \text{codim } R(\lambda I - T) < \infty \\ \dim N(\lambda I - T) < \infty \end{cases}$$

をみたすことである.

この characterization が  $\lambda$  についての一次の polynomial についての陳述であることに注目して, 本講演では, 高次の

operator と係数に持つ polynomial によって  $\mathcal{L}$  のような有限性条件を考える。

2. Riesz bundle.  $B(X) \ni T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$  を係数にもつ polynomial

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^n I - \lambda^{n-1} T_{n-1} - \dots - \lambda T_1 - T_0$$

を polynomial bundle と呼ぶ。  $\mathcal{L}(\lambda)$  の companion matrix  $\mathbb{L}$  は通常の polynomial の場合に同じく

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} T_{n-1} & T_{n-2} & T_{n-3} & \dots & T_2 & T_1 & T_0 \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる direct sum space  $X^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} X$  上の bounded linear operator である。

[定義] Polynomial bundle  $\mathcal{L}(\lambda)$  が、任意の  $\lambda \neq 0$  に対し  $\mathcal{R}(\mathcal{L}(\lambda))$  が closed で

$$\text{codim } \mathcal{R}(\mathcal{L}(\lambda)) < \infty$$

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}(\lambda)) < \infty$$

をみたす時, Riesz bundle と呼ぶ。

この呼称は, 次の定理から妥当と思われる。

[定理]. Polynomial bundle  $\mathcal{L}(\lambda)$  の companion matrix を  $\mathbb{L}$

とすると,  $\mathcal{L}(\lambda)$  が Riesz bundle であるための必要十分条件は  $\mathbb{L}$  が  $X^{(n)}$  の Riesz operator となることである.

証明.  $\mathcal{L}(\lambda)$  と  $\mathbb{L}$  の間の関係については次の事実が知られている:

$$B_1(\lambda) := I$$

$$B_2(\lambda) := (\mathcal{L}(\lambda) - \mathcal{L}(0)) / \lambda$$

$$B_{k+1}(\lambda) := (B_k(\lambda) - B_k(0)) / \lambda \quad (k=2, 3, \dots, n-1)$$

$$B(\lambda) := \begin{bmatrix} -B_1(\lambda) & -B_2(\lambda) & \cdots & -B_{n-1}(\lambda) & -B_n(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(\lambda) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと  $B(\lambda), C(\lambda)$  は  $\lambda$  の任意の値に対し可逆であり,

$$2I_n - \mathbb{L} = B(\lambda) \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\lambda) & & & & \\ & I & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & I & \\ & & & & I \end{bmatrix} C(\lambda)$$

の関係を読み取っている. この関係から次の range と kernel

の関係が導かれ、定理が証明される:

$$\forall \lambda \neq 0; \begin{cases} \operatorname{codim} R(L(\lambda)) = \operatorname{codim} R(\lambda I_m - L) \\ \dim N(L(\lambda)) = \dim N(\lambda I_m - L). \end{cases} \quad \square$$

3. Spectral properties. Operator の spectrum 及び point spectrum に類似して polynomial bundle  $L(\lambda)$  の spectrum  $\sigma(L(\cdot))$  及び point spectrum  $\sigma_p(L(\cdot))$  を定義する:

$$\sigma(L(\cdot)) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid L(\lambda) \text{ は } B(X) \text{ に逆をもたない}\}$$

$$\sigma_p(L(\cdot)) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \neq x \in X; L(\lambda)x = 0\}.$$

また, operator の essential spectrum の類似として polynomial bundle  $L(\lambda)$  の essential spectrum  $\sigma_e(L(\cdot))$  を次のように定義する:

$$\sigma_e(L(\cdot)) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \pi(L(\lambda)) \text{ は } A(X) \text{ に逆をもたない}\}.$$

Riesz operator の種々の spectral property に対応して Riesz bundle の spectral property が得られる.

[定理] Polynomial bundle  $L(\lambda)$  が Riesz bundle であるためには次のいずれか1つをみたすことが必要十分である.

(1)  $\sigma_e(L(\cdot)) = \{0\}$ ,

(2)  $\exists \mathcal{K} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}(X) : \text{a function.}$  ;  $L(\lambda)^{-1} = \mathcal{K}(\lambda) + \mathcal{A}(\lambda)$   
 $\exists \mathcal{A} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow B(X) : \text{analytic}$  ( $\lambda \notin \sigma(L(\cdot))$ )

(3)  $\sigma(L(\cdot))$  は, 0 を除いて  $L(\lambda)^{-1}$  の有限位の極である,

(4)  $\sigma(L(\cdot))$  の  $0$  でない任意の点  $\lambda_0$  は isolated point で  
operator  $(1/2\pi i) \int_{\Gamma_0} \lambda^k L(\lambda)^{-1} d\lambda$  ( $k=0, 1, \dots, 2m-2$ ) はすべて  
finite rank である. 但し  $\Gamma_0$  は  $\lambda_0$  と spectre の他の部分か  
ら分離する積分路とする.

証明. これらの証明には, 対応する Riesz operator の  
spectral property が用いられる. 例として (4) を証明する. こ  
れに対応する property

(4')  $\sigma(T)$  の  $0$  でない任意の点  $\lambda_0$  は isolated point で  
その spectral projection は finite rank である,  
は operator  $T$  の Riesz 性を特徴付けている. 前定理の証  
明に現れた  $L(\lambda)$  と  $\lambda L_m - L$  の関係は  $\sigma(L(\cdot)) = \sigma(L)$  を示  
しており, -方

$$B(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} -B_1(\lambda) & -B_2(\lambda) & \dots & -B_m(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & I \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & I & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

及  $0''$

$$C(\lambda)^{-1} = - \begin{bmatrix} \lambda^{m-1} I & \lambda^{m-2} I & \lambda^{m-3} I & \dots & I \\ \lambda^{m-2} I & \lambda^{m-3} I & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ I & & & 0 & \end{bmatrix}$$

の行表示及び列表示をそれぞれ、

$$B(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \\ \vdots \\ Y_m(\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{及び} \quad C(\lambda)^{-1} = [X_1(\lambda), \dots, X_m(\lambda)]$$

とすると

$$\begin{aligned} (\lambda I_m - \mathbb{L})^{-1} &= C(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} & & 0 \\ & I & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix} B(\lambda)^{-1} \\ &= X_1(\lambda) \mathcal{L}(\lambda)^{-1} Y_1(\lambda) + \sum_{j=2}^m X_j(\lambda) Y_j(\lambda) \end{aligned}$$

を得られ、積分すれば (第2項は analytic だから)

$$\begin{aligned} & (1/2\pi i) \int_{P_0} (\lambda I_m - \mathbb{L})^{-1} d\lambda \\ &= (1/2\pi i) \int_{P_0} X_1(\lambda) \mathcal{L}(\lambda)^{-1} Y_1(\lambda) d\lambda \\ &= \begin{bmatrix} (1/2\pi i) \int_{P_0} \lambda^{m-1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda & \cdots & (1/2\pi i) \int_{P_0} \lambda^{2m-2} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda \\ \vdots & & \vdots \\ (1/2\pi i) \int_{P_0} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda & \cdots & (1/2\pi i) \int_{P_0} \lambda^{m-1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda \end{bmatrix} \mathbb{T} \end{aligned}$$

を得る. ここに  $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} I & -T_{m-1} & \cdots & -T_2 & -T_1 \\ 0 & I & & -T_3 & -T_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & I \end{bmatrix}$  は

可逆であるから, (4) が Riesz bundle の必要十分条件である

ことがわかる。

□

[注意] 次のような Riesz bundle の十分条件は Riesz bundle の定義から明らかであることが、内山氏により講演中に指摘された:

$$(1) \exists j_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \exists m \in \mathbb{N}; \quad T_{j_0}^m \in C(X) \quad \text{でかつ}$$

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, j_0-1, j_0+1, \dots, n-1\} \quad T_j \in C(X)$$

$$(2) \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}; \exists m_j \in \mathbb{N}; \quad T_{j_0}^{m_j} \in C(X) \quad \text{でかつ}$$

$$T_i T_j = T_j T_i \quad (i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}).$$

実際、どちらの場合でも

$$(*) \quad \lambda^{m-1} T_{m-1} + \dots + \lambda T_1 + T_0$$

は power compact 従って Riesz operator となるからである。

この事実を更に次のように一般化できる。

$$(1') \quad \exists j_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}; T_{j_0} : \text{a Riesz operator}$$

$$\forall j \in \{0, \dots, j_0-1, j_0+1, \dots, n-1\} \quad T_j \in C(X)$$

又は (もっと一般的に)

$$(2') \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}; T_j : \text{Riesz operator}$$

$$T_i T_j \equiv T_j T_i \quad (i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}) \quad (\text{mod } C(X))$$

ならば  $I(\lambda)$  は Riesz bundle である。

実際、どちらの場合にも ((1') は (2') の special case)

$$(**) \quad \pi(\lambda^{m-1} T_{m-1} + \dots + \lambda T_1 + T_0)$$

は quasinilpotent element in  $A(X)$  となるからである。