

大自由度カオス力学系の不安定周期軌道の統計的性質¹

新潟大学 工学部 川崎 光宏²

1 Introduction

流体乱流や生態系など様々な系が大自由度カオス力学系と考えられる。これらの系では、基礎方程式の非線形性と大自由度性により、理論的な解析はきわめて難しい。例えば、Navier-Stokes 乱流の間欠性を、Navier-Stokes 方程式にもとづいた理論により定量的に再現することはできていない [1].

一方、平衡状態にある分子多体系という大自由度カオス系に対しては、平衡統計力学がその巨視的性質を極めて強力に記述する。成功のカギは、状態アンサンブルによる確率的記述により、運動方程式を解析する必要がなくなったことにある。特に、巨視的性質の記述には正確な確率分布は不要であり、むしろ、大自由度性により簡単な確率分布が正しい巨視的性質を再現する。したがって、大自由度カオスの巨視的性質記述のための簡単な確率分布を見つけ、発展方程式を解析する代わりに確率的アプローチをとるのは有望に思える。

普遍的で扱いやすい確率分布を見つけるのは極めて難しいであろうが、近年、大自由度カオスの巨視的性質を記述する状態アンサンブルが一本の不安定周期軌道 (UPO) から構成できることを示唆する研究がなされた [2, 3]. 最初の研究では、壁乱流の速度場の平均と分散のプロファイルが Navier-Stokes 方程式の一本の UPO から得られた [2]. つづいて、乱流の間欠性を特徴づける速度揺らぎのスケーリング指数が GOY shell model の一本の UPO から得られた [3].

これらの UPO は、15,422 次元の Newton-Raphson 法や、24 自由度の shell model のリミット・サイクルの分岐を追跡することにより得られた。これらの特別な UPO 以外に巨視的性質の異なる UPO も数多く存在するはずであるから、これらの UPO は無限個の UPO の中から選りすぐられたものだと考えられる。しかし、Newton-Raphson 法の初期値や分岐追跡のためのパラメータ変化プロトコルは試行錯誤で決められたため、UPO の選択基準は不明である。そこで、本研究の目的を、それ一本により巨視的性質を精度良く記述できるような特別な UPO を選択する基準を見つけることとする。

なお、本稿では、巨視的物理量とは多くの自由度にわたる平均として定義される物理量のこととし、また、巨視的性質とは自然測度による巨視的物理量の期待値の大自由度でのリーディング・タームとする。

¹本研究は、佐々真一さん（東京大学総合文化研究科）との共同研究である。

²E-mail: mkawasaki@eng.niigata-u.ac.jp

2 モデル

ここでは、本研究で解析するモデルを説明する。我々の目的のためには、乱流を研究する必要はなく、むしろ、多くのUPOを探索できる簡単なモデルのほうが望ましい。そこで、我々は坂口により提案されたcoupled map lattice (CML) を解析する。0から $N-1$ の N 個の格子点からなる一次元格子を考える³。 i 番目の格子点上には $(x_i, \Delta_i) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ の二つの力学変数がはりついているとする。

s_i という補助変数を「スピン」と呼ぶことにし、以下のように定義する。

$$s_i \equiv \begin{cases} +1 & (-1 \leq x_i < \Delta_i), \\ -1 & (\Delta_i \leq x_i \leq 1). \end{cases} \quad (1)$$

$i = t+1 \pmod{2}$ の格子点にある (x_i, Δ_i) の時刻 t での局所写像は

$$(x^{t+1}_i, \Delta^{t+1}_i) = (f(x^t_i, \Delta^t_i), \tanh \left[\frac{k}{2}(s^{t}_{i-1} + s^{t}_{i+1}) \right]) \quad (2)$$

一方、 $i = t \pmod{2}$ の格子点については $(x^{t+1}_i, \Delta^{t+1}_i) = (x^t_i, \Delta^t_i)$ 。ここで、 k は正のパラメータであり、 $f(x^t_i, \Delta^t_i)$ は次のように書かれるBernoulli写像とする。

$$f(x^t_i, \Delta^t_i) \equiv \frac{2(x^t_i + s^t_i)}{1 + s^t_i \Delta^t_i} - s^t_i. \quad (3)$$

ここで、写像 $f(x, \Delta)$ の不連続点は $x = \Delta$ に位置し可変であり、スピン変数 s_i を $f(x_i, \Delta_i)$ の記号力学系の記号とみなすことができる。以下、このCMLをBernoulli CMLと呼び、 $X^{t+1} = F(X^t)$ と書くことにする。ここで、 $X^t \equiv \{x^t_i, \Delta^t_i\}_{i=0}^{N-1}$ 。

坂口が示したように、Bernoulli CMLは次のような面白い性質を持っている[4]。まず、スピン配位の自然測度はIsing modelのカノニカル分布に一致する。このことをあらわに書くために、 $J(s)$ をスピン配位 $s \equiv \{s_i\}_{i=0}^{N-1}$ に対応する状態 $\{x_i, \Delta_i\}_{i=0}^{N-1}$ の集合とする。すると、 $J(s)$ 上の自然測度は、 $\mu(J(s)) = \text{const.} \times \exp[(k/2) \sum_{i=0}^{N-1} s_i s_{i+1}]$ で与えられる。さらに、初期確率分布が自然測度としたとき、スピン配位 s から別のスピン配位 s' への遷移確率 $T(s|s')$ は $T(s^{2t}|s^{2t+1}) = \prod_{i=0}^{N/2-1} (1 + s^{2t+1}_{2i+1} \Delta^{2t+1}_{2i+1})/2$, $T(s^{2t+1}|s^{2t+2}) = \prod_{i=0}^{N/2-1} (1 + s^{2t+2}_{2i} \Delta^{2t+2}_{2i})/2$ となる。

3 UPO アンサンブル

いよいよ、Bernoulli CMLにおいて、それ一本のみから巨視的性質を再現できるUPOのアンサンブルを構成する。構成の第一段階として、記号列とUPOの間に一対一対応があることを示す。記号列 $[s] \equiv (s^0, s^1, \dots, s^{p-1})$ があるとしたとき、 $[s]$ に対応する周期点 $X^0 \equiv \{x^0_i, \Delta^0_i\}_{i=0}^{N-1}$ を発見することを試みる。 $\{\Delta^0_i\}_{i=0}^{N-1}$ は定義により直ちに記号列から決まる。 $X^p \equiv F^p(X^0)$ のある成分は $x^p_i = \prod_{t=0}^{p/2-1} a^{2t}_i x^0_i + \sum_{t'=1}^{p/2-1} \prod_{t=t'}^{p/2-1} a^{2t}_i s^{2t'-2}_i (a^{2t'-2}_i - 1) + s^{p-2}_i (a^{p-2}_i - 1)$ 。ここで、 p は偶数、 $a^t_i \equiv 2/(1 + s^t_i \Delta^t_i)$ とした。任意の記号列にたいし $\prod_{i=0}^{p/2-1} a^t_i \neq 1$ のため、周期点の条

³坂口は2次元格子上的モデルを考えたが、ここでの目的には1次元格子で十分である。

件 $x_i^0 = x_i^p$ を満たす点が必ず一つ得られる. このようにして、与えられた $[s]$ に対し、 $X^0 = X^p$ であるような $X^0 \equiv \{x_i^0, \Delta_i^0\}_{i=0}^{N-1}$ が得られる. これが $[s]$ に対応する周期点であるためには、逆に、 X^0 から生成される記号列が $[s]$ に一致することを示す必要がある. 我々は、ランダムに生成された 10^6 個の記号列に対し、数値的にこのことを確かめた. これらの結果にもとづき、任意の記号列と UPO の間には一対一対応があるといえる.

この一対一対応があるため、記号列のアンサンブルをつくることで UPO のアンサンブルを得ることができる. 記号列をサンプルする確率測度の一つの自然な選択は、初期状態分布が自然測度で与えられるときの記号列の頻度分布を採用することである. この記号列 $[s]$ の頻度分布は $P([s]) = \mu(J(s^0))T(s^0|s^1)T(s^1|s^2) \cdots T(s^{p-1}|s^p)$ と書くことができる. この表式は単純なものに見えるが、ほとんどのモデルにおいて自然測度を得るのは簡単なことではない. 多くの力学系を解析するためには、巨視的性質については $P([s])$ から得られるのと同じ性質を持ち、かつ、より扱いやすい確率測度を用いるのが望ましい. このような確率測度として、 $P([s])$ 中の μ を定数 Z^{-1} で置き換えた $Q([s])$ を考える. この確率測度は次のように書かれる

$$Q([s]) = \exp[-\ln |D^{(u)}F^p(X^0)|]/Z. \quad (4)$$

ここで、 $|D^{(u)}F^p(X^0)|$ は、記号列 $[s]$ に対応する周期点 X^0 での F の p 回写像を不安定部分空間に射影したもののヤコビアンである. また、 Z は規格化の定数である. この記号列の頻度分布の表式は、文献 [5] で既に得られたものである. Eq. (4) により定義される確率測度は、あらゆる力学系で、 $P([s])$ よりも容易に評価できる.

4 解析結果

本節では、Bernoulli CML の巨視的性質が、Eq. (4) の確率測度でサンプルされるたった一つの UPO から得られることを数値的に示す. まず、Eq. (4) の確率測度によるサンプリングは Monte Carlo 法により実行される. 記号列 $[s]$ は、 $1+1$ 次元の $p \times N$ 格子上的スピン配位とみなすことができる. さらに、Eq. (4) の確率測度はカノニカル分布と同じ形をしている. したがって、我々のもとする UPO アンサンブルは、 $\ln |D^{(u)}F^p(X^0)|$ を $1+1$ 次元の Ising モデルのハミルトニアンとみなした Metropolis アルゴリズムによる Monte Carlo 法を使って得られる. UPO を得るため、 $t=0$ と $t=p-1$ の時間方向の境界において周期境界条件を課す.

周期 p の UPO 上の周期点に等しい重み $1/p$ を与えることで、一つの UPO からスピン配位 s のアンサンブルが得られる. 一つの UPO から得られるこのスピン配位アンサンブルを用いて、巨視的物理量 $-\sum_{i=0}^{N-1} s_i s_{i+1}/N$ のアンサンブル平均が次のように得られる $\varepsilon_N \equiv -\sum_{t=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{N-1} s_i^t s_{i+1}^t / (Np)$. 図 1 では、50,000 個の UPO のサンプルから計算された、 ε_N の期待値と標準偏差が異なるシステムサイズ N に対しプロットされている. N が大きくなるとともに、標準偏差がゼロに近づき、 ε_N の期待値が自然測度 $\mu(J(s))$ による値 $-\tanh(k/2)$ に収束することが確認できる. 以上のことは、ある UPO から得られた値と別の UPO から得られた値との違いが $N \rightarrow \infty$ とともに小さくなるた

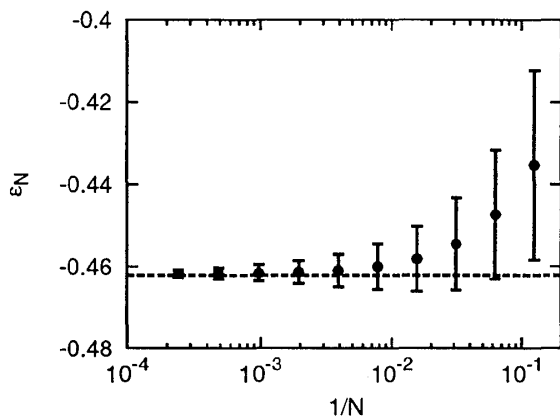


図 1: $N = 2^n$ ($3 \leq n \leq 12$), $k = 1, p = 64$ の場合に、50,000 個の UPO サンプルから計算された、 ε_N の平均 (円) と標準偏差 (エラー・バー)。破線は $N \rightarrow \infty$ の極限での自然測度による期待値 $-\tanh(1/2)$ を表す。

め、 $-\sum_{i=0}^{N-1} s_i s_{i+1}/N$ の自然測度による期待値が、一つの UPO から得られた状態アンサンブル平均として再現されたことを意味する。

5 単一の UPO による記述

本節では、なぜ巨視的性質が単一の UPO により記述されるのか、そのメカニズムを議論する。まず、初期状態分布がなめらかなときの定常状態への緩和を考えよう。このとき、記号の関数である物理量 $A(s)$ の期待値は、ある緩和時間 τ_A の後に、初期分布によらず同一の値に漸近する。したがって、初期状態分布が一様な場合、つまり、記号列 $[s]$ の頻度分布が $Q([s])$ で与えられる場合の漸近値は、初期測度が自然測度 μ で与えられた場合の値、つまり、自然測度による $A(s)$ の期待値に一致する。このため、 $t > \tau_A$ の時間領域で、 $\langle A(s^t) \rangle_Q \equiv \sum_{[s]} Q([s]) A(s^t) \simeq \langle A(s) \rangle_\mu \equiv \sum_s \mu(J(s)) A(s)$ が成立する。

この性質を用いると、 $A(s)$ の時間平均の期待値が次のように評価できる。 $\left\langle \sum_{t=0}^{p-1} A(s^t)/p \right\rangle_Q \simeq \sum_{t=0}^{\tau_A-1} \langle A(s^t) \rangle_Q/p + (p - \tau_A) \langle A(s) \rangle_\mu/p$. 周期 p を緩和時間 τ_A よりも長くとれば、 $\left\langle \sum_{t=0}^{p-1} A(s^t)/p \right\rangle_Q \simeq \langle A(s) \rangle_\mu$ となる。ここで、緩和時間はエルゴード時間 τ_e よりもずっと短いことに注意すると、周期 p は $\tau_A \ll p \ll \tau_e$ のように有限にとれることが分かる。

最後に、 $A(s)$ が ε_N のような巨視的物理量である場合を考える。大数の法則は、定常状態における、このような量の揺らぎは大自由度の極限で無視できることを主張する。したがって、 $Q([s])$ によりサンプルされたほとんど全ての記号列 $[s]$ にたいして、 $\sum_{t=0}^{p-1} A(s^t)/p \simeq \left\langle \sum_{t=0}^{p-1} A(s^t)/p \right\rangle_Q$ が成立する。

したがって、 $Q([s])$ に関してほとんど全ての $[s]$ について、 $\sum_{t=0}^{p-1} A(s^t)/p \simeq \langle A(s) \rangle_\mu$. UPO と記号列の一対一対応により、 $Q([s])$ によりサンプルされた一つ UPO に沿った時間平均は $\langle A_N(s) \rangle_\mu$ の良い近似値を与えることが結論される。以上の議論により、大自由度性と巨視的物理量に適用

される大数の法則が、単一の UPO による記述にエッセンシャルであるといえる。

6 UPO による乱流記述の解釈

以上の結果にもとづいて、UPO による乱流記述の成功 [2, 3] の理由を解釈する。特に、文献 [2, 3] で見つかった UPO と Eq. (4) によりサンプルされる UPO の関係に注目する。

過去の二つの研究の周期軌道探索において、試行状態点は何らかの方法により真の周期点 X^0 の近くに置かれ、その状態点の時間発展は発展方程式を時間積分することにより得られた。軌道が試行状態点の近くにもどってきたときの相空間中の距離がある閾値 δ よりも小さいとき、その試行状態点は周期点と判定された。

簡単のため、試行状態点の集合は周期 p の真の周期点 X^0 の δ_0 近傍にばらまかれると考える。このとき、この集合は時間発展とともに不安定方向に引伸ばされる。 d_u を不安定多様体の次元、 δ_0 を十分小さいとすれば、集合の不安定方向の体積は、一周期後に $\delta_0^{d_u} |D^{(u)} F^p(X^0)|$ となる。したがって、試行状態点から発した軌道と試行状態点の距離が一周期後に閾値 δ よりも小さい確率は $\delta^{d_u} / (\delta_0^{d_u} |D^{(u)} F^p(X^0)|)$ と見積もられる。このことは、周期点 X^0 を数値的に発見する確率が $|D^{(u)} F^p(X^0)|^{-1}$ に比例することを意味する。ここで、 $|D^{(u)} F^p(X^0)|^{-1}$ が Eq. (4) に現れるファクタであることを思い出せば、文献 [2, 3] で得られた UPO は Eq. (4) に近い確率測度でサンプルされたものと考えることができる。

UPO による乱流記述と我々の結果との対応をつけるために、あと 2 点ほど議論すべきことがある。まず、我々の議論は大数の法則が有効な巨視的物理量に関するものであるため、文献 [2, 3] で解析された物理量が多く自由度にわたる平均と考えられることを示す必要がある。まず、壁乱流の場合に調べられた物理量は壁に平行な面内での平均であった [2]。次に、文献 [3] で解析された、乱流速度場のスケーリング指数が多く自由度にわたる平均と考えられるか議論する。エネルギー・カスケードと慣性領域における自己相似性により、 q 次のスケーリング指数 ζ_q は $\zeta_q = q/3 - \ln\langle(\epsilon_{j+1}/\epsilon_j)^{q/3}\rangle$ と書くことができる [6]。ここで、 ϵ_j は j 番目の shell のエネルギー散逸率である。自己相似性により $\langle\cdot\rangle$ を慣性領域での多くの異なる shell に関する平均で置き換えることができるため、 $\langle(\epsilon_{j+1}/\epsilon_j)^{q/3}\rangle \simeq (1/N) \sum_{j=0}^{N-1} (\epsilon_{j+1}/\epsilon_j)^{q/3}$ 。したがって、スケーリング指数 ζ_q は同一分布にしたがう確率変数の平均と考えることができる。

最後に、文献 [2, 3] で研究された系における統計的に独立な自由度の数が、Eq. (4) によりサンプルされた複数の UPO から得られる巨視的物理量の値がその期待値に近いことを保証するほど大きいかわいなかを議論する。図 1 に見るように、 $N = 8$ や 16 の結果が既に良い近似値を与えている。したがって、乱流の問題においても、統計的に独立な自由度の数は十分であったと考えられる。

7 Discussion

文献 [2, 3] や上述の解釈によれば、 $|D^{(u)}F^p(X^0)|^{-1}$ の重みでサンプルされた UPO は乱流の巨視的性質を記述すると考えられる。したがって、単一の UPO による巨視的性質の記述は広く適用できることを示唆する。

双曲力学系では、周期軌道展開を用いて、相空間中の集合 R 上の自然測度 μ が $\mu(R) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_j |D^{(u)}F^p(X_j)|^{-1}$ と書かれる [7, 8, 9]。ここで、 R 内にある F^p の全ての固定点 X_j に関して和をとる。関連した研究として、大自由度カオス系を周期軌道展開により解析した研究がある [10, 11, 12]。周期軌道展開では、一つの UPO の重みは $\lim_{p \rightarrow \infty} |D^{(u)}F^p(X_j)|^{-1}$ である。これは Eq. (4) に類似しているが、自然測度を得るために極限 $p \rightarrow \infty$ をとらねばならない。対照的に、我々の結果は、巨視的性質を記述するためならば有限の周期で十分であることを示唆する。

参考文献

- [1] W. D. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence* (Oxford University Press, New York, 1990).
- [2] G. Kawahara and S. Kida, J. Fluid Mech. **449**, 291 (2001).
- [3] S. Kato and M. Yamada, Phys. Rev. E **68**, 025302(R) (2003).
- [4] H. Sakaguchi, Prog. Theor. Phys. **80**, 7 (1988).
- [5] P. Grassberger, R. Badii and A. Politi, J. Stat. Phys. **51**, 135 (1988).
- [6] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [7] T. Morita, H. Hata, H. Mori, T. Horita, and K. Tomita, Prog. Theor. Phys. **79**, 296 (1988).
- [8] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Phys. Rev. A **37**, 1711 (1988).
- [9] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, and G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum* (Niels Bohr Institute, Copenhagen, 2003), available at <http://chaosbook.org/>.
- [10] A. Politi and A. Torcini, Phys. Rev. Lett. **69**, 3421 (1992).
- [11] F. Christiansen, P. Cvitanović, and V. Putkaradze, Nonlinearity **10**, 55 (1997).
- [12] Y. Lan and P. Cvitanović, Phys. Rev. E **69**, 016217 (2004).