

4. M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. 57(1977) No.2
5. M.Suzuki, J. Stat. Phys. submitted
6. ボーズ統計 50 周年記念理論物理国際会議及び冬の学校 (1977 年 1 月 6 日 ~ 25 日
ニューデリー) のプロシーディングス。
7. M.Suzuki, Physica (in press).
8. N.G. van Kampen, Can. J. Phys. 39(1961) 551.
9. R.Kubo, K.Matsuo and K.Kitahara, J. Stat. Phys. 9(1973) 51.
10. K.Tomita, T.Ohta and H.Tomita, Prog. Theor. Phys. 52(1974) 1744 and references
cited therein.
11. K.Kawasaki, Prog. Theor. Phys. (in press)
12. H.Mori, Prog. Theor. Phys. 52(1974) 433.

超放射の厳密解 (有限系) とスケーリング理論

東大・理 有 光 敏 彦
鈴 木 増 雄

スケーリング理論を超放射系に応用し、有限系でのその厳密解と比較するところにより、スケーリング理論の意味するところをはっきり知り、また久保、松尾、北原の $1/\Omega$ 展開とのつながりをはっきりさせる。超放射系のモデルについては、(1)を参照されたい。ひとことで言えば、2 準位の同じ原子 N 個を、えんぴつ型の容器に入れた系と、熱浴と接触した光子系とを考え、その間のカップリングについて、2 次までを考慮するのである。

§ 1. Formulation

超放射の基礎方程式

$$\dot{\rho}(t) = \frac{I_1}{2} \{ [S^-, \rho S^+] + [S^- \rho, S^-] \}, \quad I_1 = \frac{2g^2}{\kappa} \quad (1.1)$$

ここに,

S^+, S^- ; total atomic dipole moment operator

$\rho(t)$; 原子系の density operator

g ; 原子 — 光子系の相互作用強度

κ ; 光子系の damping constant

ここで, $SI_1 t \rightarrow t$ とし, subspace $S = \frac{1}{2}N$ での angular momentum state による $\rho(t)$ の対角要素のみを考えると,

$$\dot{p}_m(t) = \lambda_{m+1} p_{m+1}(t) - \lambda_m p_m(t) \quad (1.2)$$

$$\lambda_m = (S+m)(S-m+1)/S, \quad -S \leq m \leq S \quad (1.3)$$

$$\lambda_m = \lambda_{-m+1} \quad (1.4)$$

連続変数 $s = \frac{m}{S}$ ($S \rightarrow \infty$) $-1 \leq s \leq 1$ とすると,

$$S p_{m/S}(t) \rightarrow P(s, t) \quad (S \rightarrow \infty)$$

(1.2) より

$$\epsilon \dot{P}(s, t) = -[1 - \exp(\epsilon \frac{\partial}{\partial s})] c(s, \epsilon) P(s, t) \quad (1.5)$$

$$c(s, \epsilon) = (1+s)(1-s+\epsilon), \quad \epsilon = \frac{1}{S}$$

§ 2. Relaxation in Extensive region ($\delta \gg \epsilon^\mu$)

(1.5) の左辺で, ϵ^2 の項まで考えて, Gaussian 近似をすると, (Kubo's $1/\Omega$ -expansion)

$$P_{lx}(s, t) = N_{ex} \cdot \exp \left[-\frac{\{s - y(t)\}^2}{2\epsilon\sigma(t)} \right] \quad (2.1)$$

$$N_{ex}^{-1} = \sqrt{2\epsilon\sigma(t)} \left\{ \sqrt{\pi} - \text{Erfc} \left(\frac{1-y(t)}{\sqrt{2\epsilon\sigma(t)}} \right) - \text{Erfc} \left(\frac{\delta+y(t)}{\sqrt{2\epsilon\sigma(t)}} \right) \right\} \quad (2.2)$$

ここで, $\text{Erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$

$$y(t) = \frac{(2-\delta) - \delta e^{2t}}{(2-\delta) + \delta e^{2t}} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \frac{\delta^2 e^{4t}}{\{(2-\delta) + \delta e^{2t}\}^4 \delta^2} \{16\sigma_0 + 8\delta(1-\delta)(2-\delta)\} \\ & - \frac{2}{\{(2-\delta) + \delta e^{2t}\}^4} \{(2-\delta)^3 \delta e^{2t} - 4(2-\delta)^2 t \delta^2 e^{4t} - (2-\delta) \delta^3 e^{6t}\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

今, $\delta \rightarrow 0$ (ただし $\tau_e = \delta e^{2t}$ fixed) のふるまいをみると, (2.3) (2.4) より, σ の最大値は,

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{4\delta^2} (\sigma_0 + \delta + \delta^2 \ell_n \delta - \delta^2 \ell_n 2) \quad \text{at } \tau_e = 2, \quad y = 1 \quad (2.5)$$

よって, $\delta \rightarrow 0$ では

$$\sigma_{\max} \sim \delta^{-2} \quad ((\text{anormalous fluctuation}))$$

§ 3. Relaxation from Unstable equilibrium ($\delta \ll \epsilon^\mu$)

結果だけかくと,

(i) Initial region

$$P_{\text{ini}}(s, \tau) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{1-s}{\tau}\right), \quad \tau = \epsilon e^{2t} \quad (3.1)$$

(ii) Scaling region

$$P_{\text{sc}}(s, \tau) = \frac{\exp\left[-\frac{2(1-s)}{\tau\{(1+s) + \frac{\tau_i}{\tau}(1-s)\}^2}\right]}{\tau\{(1+s) + \frac{\tau_i}{\tau}(1-s)\}^2} \quad (3.2)$$

今は, $\tau_i = 0.3$ として数値計算をする。(Fig. 6, 7 参照)

§ 4. Exact solution for Finite S

以下,

$$\sum_{k=a}^b, \quad (a > b) \text{ はゼロと考える。}$$

また,

$$s_0 = \begin{cases} 1 & N = \text{even} \\ \frac{1}{2} & N = \text{odd} \end{cases}, \quad \eta = \begin{cases} 0 & N = \text{even} \\ 1 & N = \text{odd} \end{cases}$$

(N は atom の数, $S = \frac{1}{2}N$) (4.1)

$$s_1 = s_0 - 1, \quad \lambda_{m_0+1} = 1, \quad m_0 = S(1 - \delta)$$

とする。

さらに,

$$p_m(0) = \begin{cases} 1 & m = m_0 \\ 0 & m \neq m_0 \end{cases}$$

$$c_k^m = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m - \lambda_k} c_k^{m+1} \quad (k \neq m) \quad (4.2)$$

$$d_k^m = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m - \lambda_k} \left(d_k^{m+1} - \frac{1}{\lambda_m - \lambda_k} c_k^{m+1} \right) \quad (k \neq m)$$

である。

$$i) \quad m_0 \geq m \geq s_0$$

$$p_m(t) = \sum_{k=m}^{m_0} c_k^m e^{-\lambda_k t} \quad (4.3)$$

$$c_m^m = p_m(0) - \sum_{k=m+1}^{m_0} c_k^m \quad (4.4)$$

$$ii) \quad s_1 \geq m \geq 1 - m_0$$

$$p_m(t) = \sum_{k=m}^{s_1} (d_k^m + c_k^m) e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=-m+2}^{m_0} c_k^m e^{-\lambda_k t} + \eta c_{\frac{1}{2}}^m e^{-\lambda_{\frac{1}{2}} t} \quad (4.5)$$

$$c_m^m = \lambda_{m+1} \left\{ p_{m+1}(0) - \sum_{k=m+1}^{S_1} d_k^{m+1} - \sum_{k=-m+2}^{m_0} c_k^{m+1} - \eta c_{\frac{1}{2}}^{m+1} \right\} \quad (4.6)$$

$$d_m^m = p_m(0) - \sum_{k=m+1}^{S_1} d_k^m - \sum_{k=-m+2}^{m_0} c_k^m - \eta c_{\frac{1}{2}}^m \quad (4.7)$$

iii) $-m_0 \geq m \geq -S$

$$p_m(t) = \sum_{k=m}^{-m_0} c_k^m e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=-m_0+1}^{S_1} (d_k^m + t c_k^m) e^{-\lambda_k t} + \eta c_{\frac{1}{2}}^m e^{\lambda_{\frac{1}{2}} t} \quad (4.8)$$

$$c_m^m = p_m(0) - \sum_{k=m+1}^{-m_0} c_k^m - \sum_{k=-m_0+1}^{S_1} d_k^m - \eta c_{\frac{1}{2}}^m \quad (4.9)$$

N が 20 の場合の数値計算の結果を Fig. 1~5 に図示する。 $\tau \lesssim 10$ については、Scaling の結果との一致がひじょうによい。(Fig. 4 と Fig. 6 を比較するとよくわかる。)

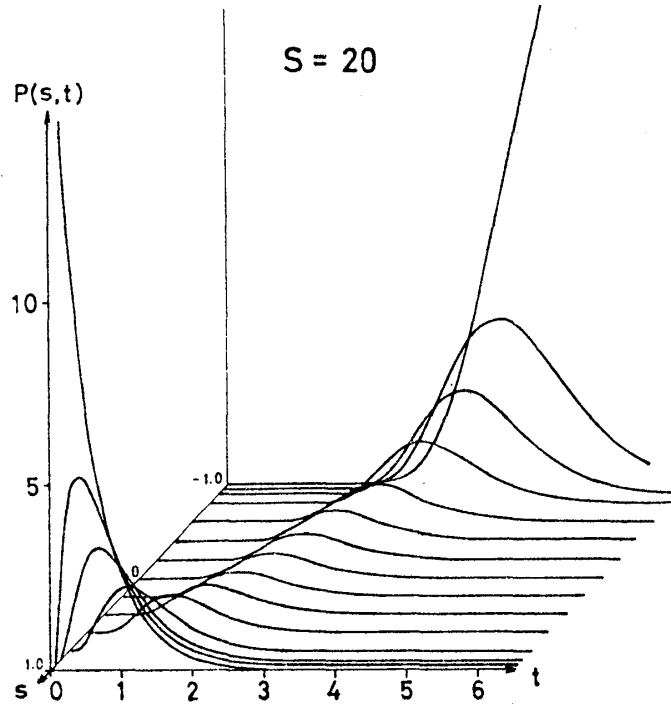


図 1.

Fig. 2

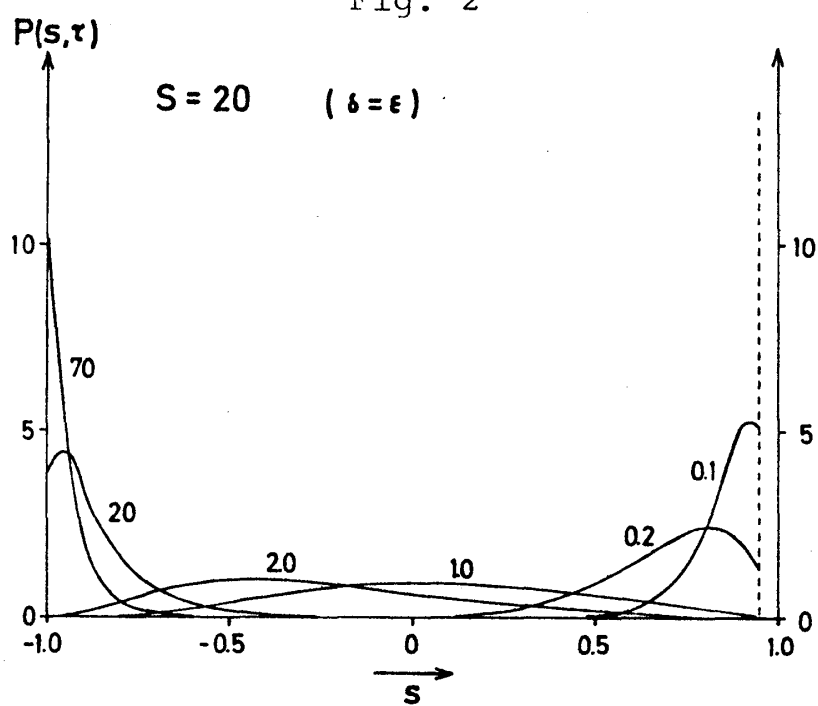


図 2.

Fig. 3

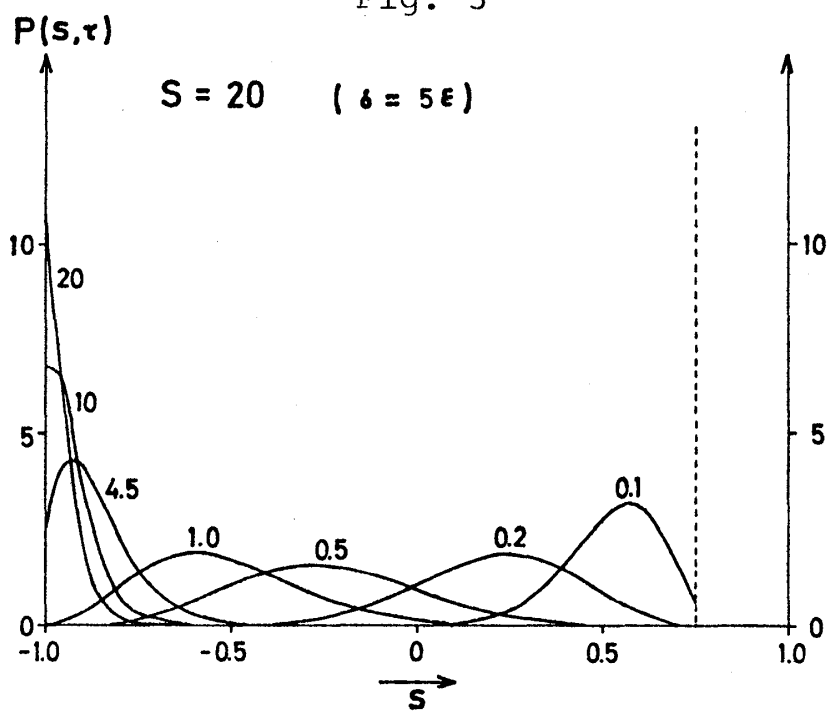


図 3.

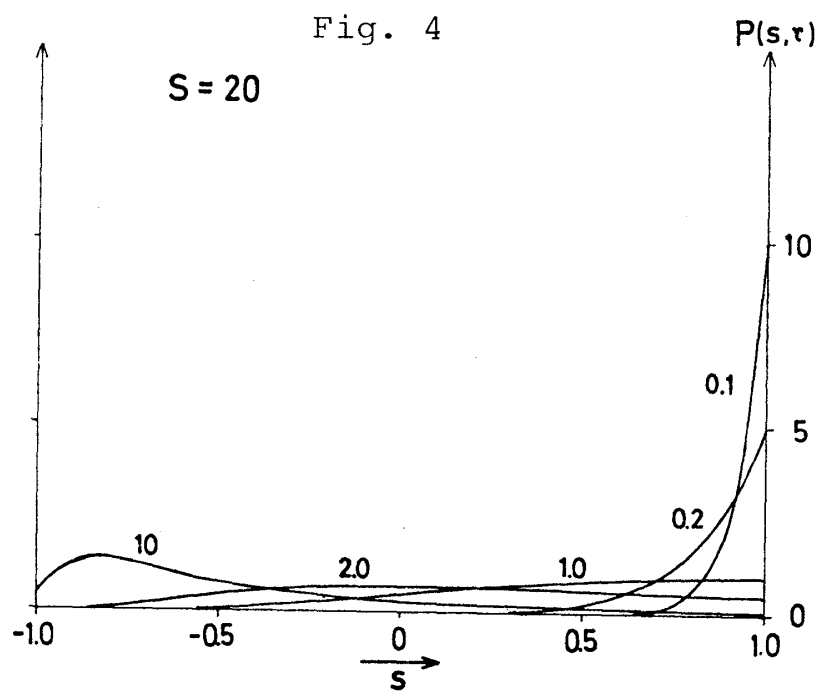


図 4.

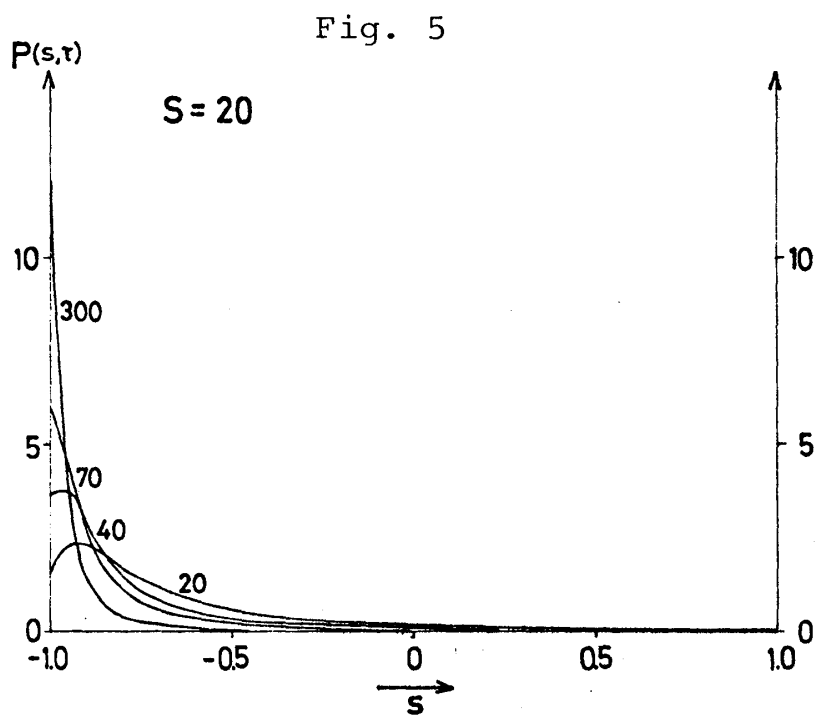


図 5.

Fig. 6

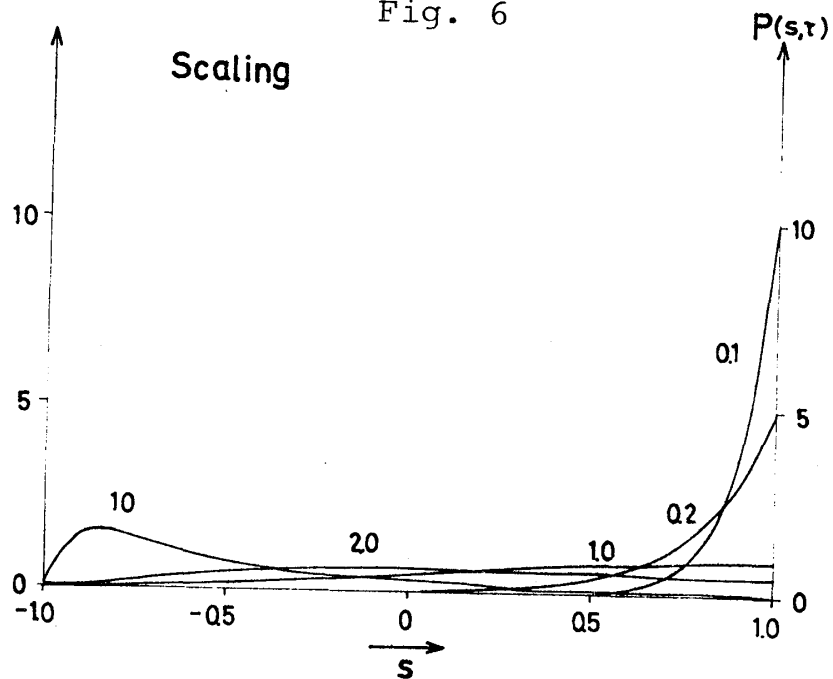


図 6.

Fig. 7

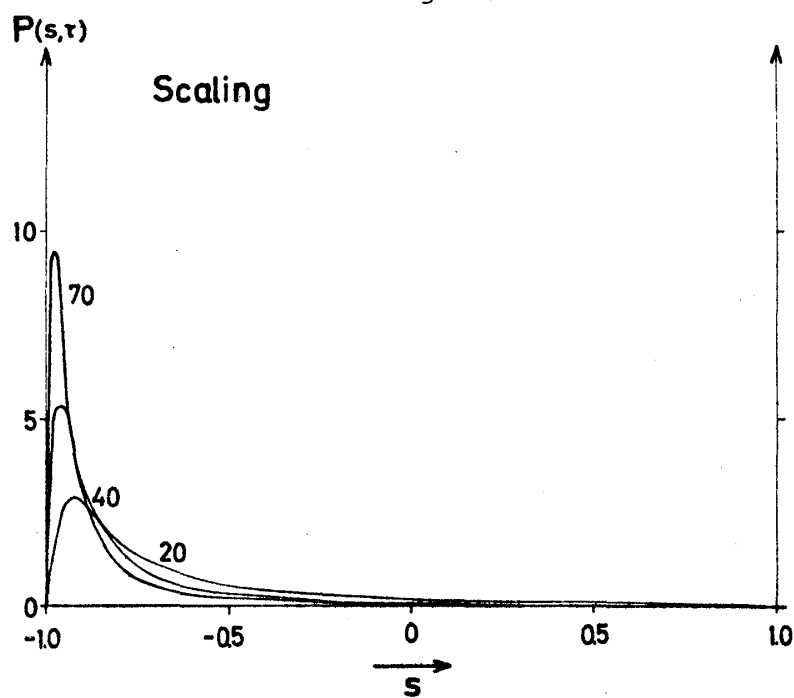


図 7.

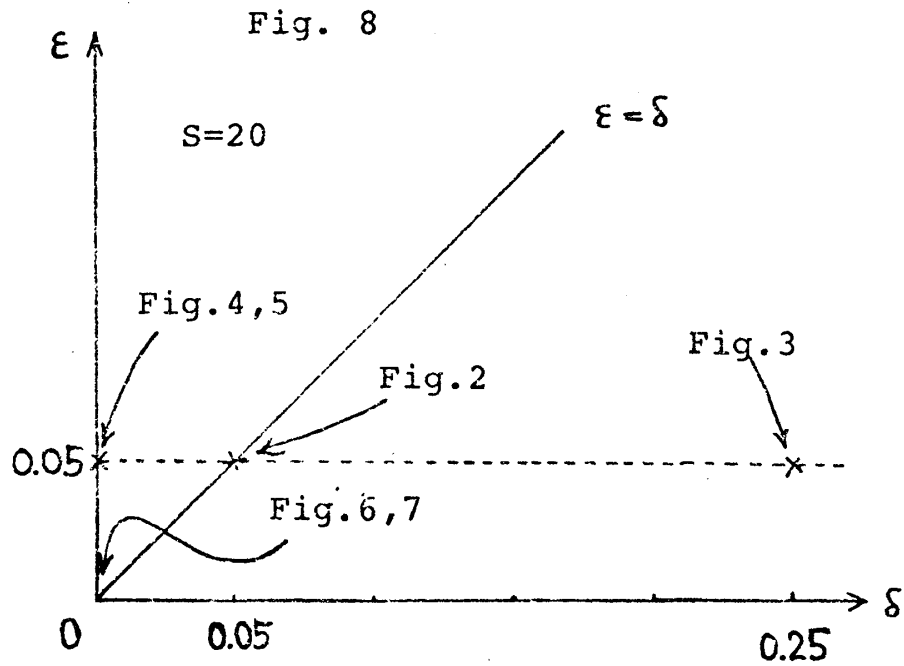


図 8.

参 考 文 献

・超放射についての論文

- (1) R.J.Glauber & F.Haake in "*Cooperative Phenomena*" H.Haken ed. 1974 North-Holland Pub. Comp.

・スケーリング理論の論文

- (2) M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 77, *ibid*, **56** (1976) 477, *ibid*, **57** (1977) No.2
- (3) M.Suzuki, J. Stat. Phys. **16** (1977) No.1.
- (4) M.Suzuki, Physica (1976) (in press)
- (5) M.Suzuki, J. Stat. Phys. (1977) submitted

・ Ω -展開と示量性に関する論文

- (6) R.Kubo, K.Matsuo, and K.Kitahara, J. Stat. Phys. **14** (1973) 51.
- (7) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **53** (1975) 1657, *ibid*, **55** (1976) 383, *ibid*, **55** (1976) 1064.
- (8) M.Suzuki, Physica **84A** (1976) 48.