

Approximation of nonlinear semi-groups

早大 教員 宮 寺 功

§ 1. Introduction

X_0 を Banach 空間 X の部分集合とし, $\text{Cont}(X_0)$ を X_0 から
それ自身への (必ずしも linear でない) contraction operator
の全体とする.

定義 1.1 $\text{Cont}(X_0)$ に属する operator の族 $\{T(t); t \geq 0\}$
は, 次の (i), (ii) をみたすとき contraction semi-group
on X_0 とよばれる.

$$(i) \quad T(0) = I, \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0$$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x, \quad x \in X_0.$$

定義 1.2 contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on X_0
の i. g. A_0 (infinitesimal generator) および w. i. g. A'
(weak infinitesimal generator) とそれぞれ

$$A_0 x = \lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} (T(h) - I) x$$

$$A' x = w\text{-}\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} (T(h) - I) x$$

により定義する。これらの定義域を $D(A_0)$, $D(A')$ とかく。

(nonlinear) contraction semi-group の理論は最近めざましい発展を遂げてあり, linear contraction semi-group について知られてきている結果の多くが nonlinear の場合へ拡張されている。とくに Kōmura [11] に始まり Kōmura [12], Kato [9, 10], Crandall and Pazy [3, 4], Dorroh [7] 等による, Hille-Yosida の定理の一般化はその著しい成果である。

この小文は contraction semi-groups の approximations および convergence を論じるのが目的である。

§ 2. Lemmas

定義 2.1 A は $D(A) \subset X$, $R(A) \subset X$ を含む少なくとも一価でない operator とする。各 $x, y \in D(A)$, $x' \in Ax$, $y' \in Ay$ に対して

$$\operatorname{Re}(x' - y', f) \leq 0$$

なる f が $f \in F(x - y)$ ($F: X \rightarrow X^*$ は duality map) が存在するとき, A は dissipative であるといわれる。また, dissipative operator A は

$$R(I - \lambda_0 A) = X, \text{ some } \lambda_0 > 0$$

をみたすとき, m -dissipative とよばれる.

補題 2.1 ([21]) $X_0 \subset X$ の閉部分集合とし, $U \in D(U)$
 $= X_0$ を β dissipative, Lipschitz continuous operator
 とする.

$$(2.1) \quad R(I - \lambda U) \supset X_0, \quad \lambda > 0$$

ならば, U は contraction semi-group $\{T(t; U); t \geq 0\}$
 on X_0 の i. g. である.

$$(2.2) \quad T(t; U)x - x = \int_0^t U T(s; U)x \, ds, \quad t \geq 0, x \in X_0$$

我々の目的に対して基本的な補題となる.

補題 2.2 $X_0 \subset X$ の閉部分集合とし, $C \in \text{Cont}(X_0)$,

$$(2.3) \quad R(I - \lambda(C - I)) \supset X_0, \quad \lambda > 0$$

とする. したがって, 補題 2.1 から, $C - I$ および $A^h =$
 $h^{-1}(C - I)$, $h > 0$ はそれぞれ contraction semi-groups
 $\{T(t; C - I); t \geq 0\}$, $\{T(t; A^h); t \geq 0\}$ の i. g. である.
 このとき, つぎの不等式が成立する.

$$(2.4) \quad \|T(m; C - I)x - C^m x\| \leq \sqrt{m} \| (C - I)x \|$$

, $x \in X_0$, $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$(2.5) \quad \|T(t; A^h)x - C^{\lceil t/h \rceil} x\| \leq (\sqrt{th} + h) \|A^h x\|$$

, $x \in X_0$, $t \geq 0$, $h > 0$.

証明. (Miyadera and Oharu [17] 参照) $x \in X_0$ とし,

$$g_x(t) = e^t T(t; C-I)x \quad \text{と おく と}$$

$$g_x(t) = x + \int_0^t e^s C(e^{-s} g_x(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

以下 [17] §3 におけると同様にして (2.4) とする. (2.5)

はこれから容易である. 実際, $T(t; A^h) = T(th^{-1}; C-I)$ の
ゆえ, (2.4) から

$$\|T([t/h]h; A^h)x - C^{[t/h]}x\| \leq \sqrt{th} \|A^h x\|.$$

$$\begin{aligned} \text{また } \|T(t; A^h)x - T([t/h]h; A^h)x\| &\leq \int_{[t/h]h}^t \|A^h T(s, A^h)x\| ds \\ &\leq h \|A^h x\|. \end{aligned} \quad \text{終.}$$

系 2.3 X_0 は X の凸閉部分集合とし, $C \in \text{Cont}(X_0)$ とす
る. このとき不等式 (2.4), (2.5) が成立する.

証明. (2.3) が成立することを示せば十分である. $\lambda > 0$,
 $x \in X_0$ と任意に固定し

$$Ty = \frac{1}{1+\lambda} x + \frac{\lambda}{1+\lambda} Cy, \quad y \in X_0.$$

と おく と, $T: X_0 \rightarrow X_0$, strictly contraction. よって
 $y = Ty$ i.e., $[I - \lambda(C-I)]y = x$ なる $y \in X_0$ が
存在する. 終.

注意. 不等式 (2.4) は, はじめに $C \in \text{Cont}(X)$, C が
linear のとき, Chernoff [5] により示された; この nonlinear
への拡張は筆者 [13, 17] による. 系 2.3 は, はじめに X が
Hilbert 空間のとき Brezis and Pazy [1] により示された; 二

れは Banach 空間への拡張, 即ち補題 2.2 は Miyadera and Oharu [17] による. 同様の結果が Brezis and Pazy により知られている.

系 2.3 の応用

$\{T(t); t \geq 0\}$ が linear contraction semi-group on X のとき, つぎの $(A_1) \sim (A_4)$ はよく知られている: $A_h = h^{-1}(T(h) - I)$, $\lim_{h \rightarrow 0+} A_h x = Ax$ (i.e., A は i.g.), $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$ とおくとき

$$(A_1) \quad T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0+} (\exp t A_h)x \quad (= \lim_{h \rightarrow 0+} T(t; A_h)x)$$

$$(A_2) \quad T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} (\exp t A(I - \lambda A)^{-1})x$$

$$(A_3) \quad T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \frac{t}{n} A)^{-n} x$$

, $x \in X$, $t \geq 0$;

$$(A_4) \quad T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(1-t)I + t T(1/n)\}^n x, \quad x \in X, 0 \leq t \leq 1.$$

これは nonlinear の場合にも成立する: と表示そう.

X_0 は X の凸閉部分集合, $\{T(t); t \geq 0\}$ は contraction semi-group on X_0 とし

$$A_h = h^{-1}(T(h) - I), \quad E = \{x \in X_0; \|A_h x\| = O(1) \text{ as } h \rightarrow 0+\}$$

とおく. (A_1) , (A_4) に対応する結果としたい.

定理 2.4 $x \in \bar{E}$ とする.

(a) 各 A_h は contraction semi-group $\{T(t; A_h); t \geq 0\}$ on X_0

の i.g. で, 任意の有限区間 τ -様に

$$(2.6) \quad T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0+} T(t; A_h)x, \quad t \geq 0;$$

(b) $0 \leq t \leq 1$ τ -様に

$$(2.7) \quad T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (1-t)I + tT(1/n) \}^n x.$$

証明. $x \in E$ に対して (2.6), (2.7) を示せば十分である.

(a) $T(h) \in \text{Cont}(X_0)$ のから, 系 2.3 から

$$\|T(t; A_h)x - T(h)^{[t/h]}x\| \leq (\sqrt{th} + h) \|A_h x\|, \quad t \geq 0, h > 0,$$

$$= \text{ゆえ} \quad \|T(t)x - T(h)^{[t/h]}x\| \leq \|T(t - [t/h]h)x - x\| \quad \text{と} \quad \text{か} \quad \text{さ}$$

(2.6) をうさ.

(b) $\xi \in [0, 1]$, $h > 0$ に対して

$$C_h(\xi) = \xi T(h) + (1-\xi)I, \quad A^h(\xi) = h^{-1}(C_h(\xi) - I)$$

とみると, $C_h(\xi) \in \text{Cont}(X_0)$; よって系 2.3 から, $A^h(\xi)$

は contraction semi-group $\{T(t; A^h(\xi)); t \geq 0\}$ の i.g., から

$$\|T(t; A^h(\xi))x - C_h(\xi)^{[t/h]}x\| \leq (\sqrt{th} + h) \|A^h(\xi)x\|, \quad t \geq 0.$$

$$A^h(\xi) = \xi A_h \quad \text{のから} \quad T(t; A^h(\xi)) = T(t; \xi A_h) = T(t\xi; A_h).$$

$$\text{よって} \quad \|T(t\xi; A_h)x - C_h(\xi)^{[t/h]}x\| \leq (\sqrt{th} + h) \|A_h x\|. \Rightarrow$$

で $t = 1$ とみると

$$\|T(\xi; A_h)x - \{(1-\xi)I + \xi T(h)\}^{[1/h]}x\| \leq (\sqrt{h} + h) \|A_h x\|.$$

= ゆえ (2.6) とから (2.7) をうさ.

終.

つぎに (A_2) , (A_3) について調べる.

A は m -dissipative operator とすると, $J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$

$\in \text{Cont}(X)$, $\lambda > 0$. 系 2.3 から $A^\lambda = \lambda^{-1}(J_\lambda - I)$ (A から一価のときは $A(I - \lambda A)^{-1}$ と一致する) は contraction semi-group $\{T(t; A^\lambda); t \geq 0\}$ on X の i.g., かつ

$$\|T(t; A^\lambda)x - J_\lambda^{[t/\lambda]}x\| \leq (\sqrt{t\lambda} + \lambda)\|A^\lambda x\|, \quad x \in X, t \geq 0.$$

$x \in D(A)$ のとき $\|A^\lambda x\| \leq \|Ax\|$ ($= \inf\{\|x'\|, x' \in Ax\}$) かつ

$$(2.8) \quad \|T(t; A^\lambda)x - (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]}x\| \leq (\sqrt{t\lambda} + \lambda)\|Ax\|$$

$$, \quad x \in D(A), t \geq 0.$$

とくに X^* が uniformly convex のときには, 各 $x \in \overline{D(A)}$ に対し

$$(2.9) \quad T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} T(t; A^\lambda)x, \quad t \geq 0$$

が任意の有限区間で一様に存在して, $\{T(t); t \geq 0\}$ はつぎの

(a), (b) を満足する unique contraction semi-group on $\overline{D(A)}$

である ([10], [7]): 各 $x \in D(A)$ に対して

(a) $T(t)x$ は強絶対連続

(b) $T(t)x \in D(A)$, $t \geq 0$, $(d/dt)T(t)x \in A^0 T(t)x$ a.a. t ,

ここに A^0 は A の canonical restriction. この $\{T(t); t \geq 0\}$

は A から生成された contraction semi-group とよびなす

る. (2.8), (2.9) からつぎの定理をうる:

定理 2.5 X^* は uniformly convex, A は m -dissipative,

$\{T(t); t \geq 0\}$ は A から生成された semi-group とする,

各 $x \in \overline{D(A)}$ に対して, 任意の有限区間で一様に

$$(2.10) \quad T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} T(t; A^\lambda x)$$

$$(2.11) \quad T(t)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - \frac{t}{n} A)^{-n} x.$$

注意. A が dissipative, $R(I - \lambda A) \supset \overline{\text{co}(D(A))}$, $\lambda > 0$ ならば, contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が存在して (2.11), (2.12) が成立する.

§ 3. Convergence of semi-groups

本節では linear semi-group に関する Trotter-Kato の定理 ([23], [27]) の nonlinear への拡張を試みる

定理 3.1 ([14]) X は Banach 空間, $X^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) とその部分集合, 各 k に対して $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$ は contraction semi-group on $X^{(k)}$, その i.g. $A^{(k)}$ とし, つぎの (a) ~ (c) と仮定する:

$$(a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} x = Ax, \quad x \in D \left(\subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^{(k)}) \right)$$

(b) A (on D) は或る contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $X^{(0)}$ ($X^{(0)}$ は X の部分集合) の w.i.g. の restriction

(c) D の部分集合 D_0 が存在して, $x \in D_0$ のとき

$$(c_1) \quad T^{(k)}(t)x \in D(A^{(k)}) \quad \text{a.a. } t \geq 0$$

$$(c_2) \quad T(t)x \in D \quad \text{a.a. } t \geq 0.$$

このとき, 各 $x \in D_0$ に対して

$$(3.1) \quad T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geq 0,$$

上の (3.1) は任意の有限区間で一様収束してゐる.

注意. $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$, $\{T(t); t \geq 0\}$ はそれぞれ $\overline{X^{(k)}}$, $\overline{X^{(0)}}$ の上の contraction semi-group に拡張できる. このとき (3.1) は $\overline{D_0}$ の上で成立する. 系 3.2, 3.3 についても同様.

系 3.2 X^* は uniformly convex, $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$ は contraction semi-group on $X^{(k)}$, その i.g. $\in A^{(k)}$ とする.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)}x = Ax, \quad x \in D(A), \quad R(I - \lambda_0 A) = X \quad \text{some } \lambda_0 > 0,$$

ならば, A は m -dissipative (したがって A は contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $D(A)$ を生成する) かつ各 $x \in D(A)$ に対して収束

$$T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geq 0$$

が任意の有限区間で一様に成立する.

証明. 各 $A^{(k)}$ が dissipative のゆえ, その極限 A も dissipative, よって A は一価に m -dissipative. このとき A は contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $D(A)$ の w.i.g. (また, $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の w.i.g. でもある) である ([9]). $x \in D(A)$ のとき $T(t)x$, $T^{(k)}(t)x$ は強絶対連続となり, X の reflexivity から, a.a. t で (強)微分可能; D , D_0 としてともに $D(A)$ とする. $\square$ により定理 3.1 (c) を満足する. 終.

系 3.3 X , X^* はともに uniformly convex, $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$ は contraction semi-group on $X^{(k)}$ とし, その i.g. $\in A^{(k)}$ とする. A が m -dissipative

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} x = A^0 x, \quad x \in D(A)$$

ることは、各 $x \in D(A)$ に対して

$$(3.2) \quad T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geq 0,$$

収束 (3.2) は任意の有限区間で一様である、 $\Rightarrow \{T(t); t \geq 0\}$

は A から生成される contraction semi-group on $D(A)$.

証明. 生成定理から A^0 は contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $D(A)$

の i.g. であることが知られている. 系 3.2 の証明と同様にし

て $D_0 = D = D(A)$ とすると定理 3.1(c) が成立する

からである.

終

注意. 1°) 系 3.3 において, A が m -dissipative という条件と

(3.3) A は closed dissipative, $R(I - \lambda A) \supset \text{co}(D(A))$, $\lambda > 0$
と弱めることが出来る. 実際, Brezis and Pazy [1] と同様にして, (3.3) から, 各 $x \in D(A)$ に対して $A^0 x$ が一意として存在し, A^0 は contraction semi-group $\{T(t)\}$ on $D(A)$ の i.g. となるから.

2°). $A^{(k)}$, A が条件 (3.3) を満足すれば, $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^{(k)})^0 x = A^0 x$, $x \in D(A)$ から収束 (3.2) がともなう.

定理 3.4 ([1], [16]) X^* は uniformly convex とする. $A^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, \dots$), A は m -dissipative; $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A^{(k)})}$

, $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ 是, $\forall k \in \mathbb{N}$ $A^{(k)}$, A 是生成した contraction semi-group である.

$$(i) \quad \overline{D(A^{(k)})} \supset \overline{D(A)}$$

$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J_{\lambda}^{(k)} x = J_{\lambda} x, \quad x \in X, \lambda > 0$$

$$, \quad \Rightarrow \quad J_{\lambda}^{(k)} = (I - \lambda A^{(k)})^{-1}, \quad J_{\lambda} = (I - \lambda A)^{-1},$$

ならば, 各 $x \in \overline{D(A)}$ に対して任意の有限区間で一樣に

$$T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geq 0.$$

注意. 1°. m -dissipativity 是

$$A^{(k)}, A \text{ は dissipative, } R(I - \lambda A^{(k)}) \supset \overline{\text{co}(D(A^{(k)}))}, R(I - \lambda A) \supset \overline{\text{co}(D(A))}$$

により, また (ii) 是

$$(ii') \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J_{\lambda}^{(k)} x = J_{\lambda} x, \quad x \in \overline{\text{co}(D(A))}, \lambda > 0$$

によりおまかえることができてゐる.

$$2^{\circ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J_{\lambda_0}^{(k)} x = J_{\lambda_0} x, \quad x \in X, \text{ for some } \lambda_0 > 0 \quad \text{ならば (ii)}$$

が結論される.

これは Trotter-Kato の定理の nonlinear への一般化が
である.

定理 3.5 ([1], [16]) X^* 是 uniformly convex, $A^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 是 m -dissipative として, $J_{\lambda}^{(k)} = (I - \lambda A^{(k)})^{-1}$, $\lambda > 0$
とある.

$$(i) \quad \text{或る } \lambda_0 > 0 \text{ に対して, } \lim_{k \rightarrow \infty} J_{\lambda_0}^{(k)} x (= J_{\lambda_0} x \text{ とおく})$$

$x \in X$ が存在する

$$(ii) \quad \overline{D(A^{(k)})} \supset \overline{R(J_{\lambda_0})}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

と仮定するとき、つぎの (a), (b) とうる:

(a) すべての $\lambda > 0$ に対し, $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\lambda}^{(k)} x (= J_{\lambda} x \text{ とかく})$, $x \in X$ が存在し, かつ $J_{\lambda} = (I - \lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$ なる m -dissipative operator A が存在する.

(b) $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A^{(k)})}$, $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ とそれそれ $A^{(k)}$, A から生成される contraction semi-group となるとき, 各 $x \in \overline{D(A)}$ に対して

$$T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)}(t)x, \quad t \geq 0,$$

この収束は任意の有限区間で一様である.

証明. 仮定 (i) から (a) が結論される. 実際, $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\lambda}^{(k)} x = J_{\lambda} x$, $x \in X$, $\lambda > 0$ が存在して

$$J_{\lambda} x = J_{\mu} \left(\frac{\mu}{\lambda} x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_{\lambda} x \right), \quad \lambda, \mu > 0, \quad x \in X.$$

これから $R(J_{\lambda}) = R(J_{\lambda_0})$, $\lambda^{-1}(x - J_{\lambda}^{-1}x) = \lambda_0^{-1}(x - J_{\lambda_0}^{-1}x)$, $\lambda > 0$, $x \in R(J_{\lambda_0})$. したがって

$$Ax = \lambda_0^{-1}(x - J_{\lambda_0}^{-1}x), \quad x \in R(J_{\lambda_0}).$$

により A を定義すれば, A は m -dissipative, $D(A) = R(J_{\lambda_0})$, $J_{\lambda} = (I - \lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$. その結果, 定理 3.4 から (b) とうる.

終.

系 3.6 ([15]) X^* は uniformly convex, $A^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) は

single-valued m -dissipative, $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A^{(k)})}$ と $A^{(k)}$ が生成する contraction semi-group とする.

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} x = Ax, \quad x \in D(A)$$

$$(ii) \quad \overline{R(I - \lambda_0 A)} = X, \quad \text{some } \lambda_0 > 0$$

ならば, $\bar{A}$ は m -dissipative (したがって, $\bar{A}$ は contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ を生成する), かつ各 $x \in \overline{D(A)}$ に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)}(t)x = T(t)x, \quad t \geq 0,$$

収束は任意有限区間で一様である.

証明. 容易にわかる如く, $\bar{A}$ は m -dissipative, $\lim_{k \rightarrow \infty} (I - \lambda_0 A^{(k)})^{-1} x = (I - \lambda_0 \bar{A})^{-1} x, x \in X$. 定理 3.5 を用いればよい. 終.

§ 4. Approximation of semi-groups

本節の結果は § 3 の convergence theorems と補題 2.3 に基づくものである.

定理 4.1 ([17]) X は Banach 空間, $X^{(k)} (k=1, 2, 3, \dots)$ は X の凸閉部分集合, $C_k \in \text{Cont}(X^{(k)})$, $\{h_k\}$ は $h_k \rightarrow 0$ なる正数列とし, 以下の (i) ~ (iii) を仮定する.

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{-1} (C_k - I)x = Ax, \quad x \in D\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} X^{(k)}\right)$$

(ii) A (on D) は或る contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on a closed set $X^{(0)}$ の w.i.g. の restriction

(iii) D の部分集合 D_0 が存在して, $x \in D_0$ のとき $T(t)x \in D$ a.a. $t \geq 0$. このとき各 $x \in \overline{D_0}$ に対して

$$(4.1) \quad T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k^{[t/h_k]} x, \quad t \geq 0,$$

収束 (4.1) は任意の有限区間で一様である.

証明. $A^{(k)} = h_k^{-1}(C_k - I)$ とおくと, 系 2.3 から, $A^{(k)}$ は contraction semi-group $\{T^{(k)}(t); t \geq 0\}$ on $X^{(k)}$ の i.g., かつ

$$(4.2) \quad \|T^{(k)}(t)x - C_k^{[t/h_k]} x\| \leq (\sqrt{th_k} + h_k) \|A^{(k)}x\|$$

, $x \in X^{(k)}$, $t \geq 0$. また定理 3.1 から, $x \in D_0$ のとき

$$T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)}(t)x \text{ が任意の有限区間で一様に成立する.}$$

これと (4.2) とから, 収束 (4.1) は $x \in D_0$ に対して成立する. 終.

系 4.2 $X^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) は X の凸閉部分集合, $C_k \in \text{Cont}(X^{(k)})$, $\{h_k\}$ は $h_k \rightarrow 0$ なる正数列とする.

$$(a) \quad \begin{cases} X^* \text{ が uniformly convex, } \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax, \\ x \in D(A), R(I - \lambda_0 A) = X \text{ some } \lambda_0 > 0 \end{cases}$$

または

$$(b) \quad \begin{cases} X, X^* \text{ とともに uniformly convex, } A \text{ は } m\text{-dissipative,} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = A^0 x \end{cases}$$

と仮定する. $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ は A から生成される

contraction semi-group とするとき, $x \in \overline{D(A)}$ に対して

収束 (4.1) が成立する.

証明. (a) のときは, A は $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の w.i.g.
 ; (b) のときは, A° は $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の i.g. の
 restriction である. かつ $D_0 = D = D(A)$ と $\alpha = \beta = \gamma$ により
 定理 4.1 (iii) が成立する. 終.

注意. (b) において, A の m -dissipativity は (3.3) において
 かえてよい.

A は Banach 空間 X の部分集合 $D(A)$ で定義され X の値を
 とる operator とし, Cauchy 問題

$$(4.3) \quad (d/dt)u(t) = Au(t) \text{ a.a. } t \geq 0, \quad u(0) = x$$

を考へる. $u(t)$ が $[0, \infty)$ の任意有限区間で強絶対連続,
 かつ (4.3) を満足するとき, u は Cauchy 問題 (4.3) の解
 とよぶことにする. A が dissipative ならば解は高々 1 つ
 である.

(4.3) に対して approximating scheme

$$(4.4) \quad \begin{cases} u_k((m+1)h_k) = C_k u_k(mh_k) \\ u_k(0) = x \end{cases}$$

, ことに $\{h_k\}$ は $h_k \rightarrow 0$ なる正数列, C_k は X の部分集合
 $X^{(k)}$ で定義される operator, を導入する.

さて, 系 4.2 の条件 (a), (b) の中の A の m -dissipativity
 は " Cauchy 問題 (4.3) ((b) のときは $(d/dt)u(t) = A^\circ u(t)$) が

初期値 $x \in D(A)$ に対して unique な解 $T(t)x (= u(t; x))$ を持つ" ということを導くことに注意する. したがって系 4.2 は, scheme (4.4) がつぎの条件 (C), (S) を満足するとき, 近似解が (4.3) の解に収束する, i.e., $x \in D(A)$ のとき

$$(4.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k([t/h_k]h_k) (= \lim_{k \rightarrow \infty} C_k^{[t/h_k]} x) = T(t)x, \quad t \geq 0$$

となることを意味している:

$$(C) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax, \quad x \in D(A)$$

(4.6) のときには A は A^0 で置きかえる)

$$(S) \quad C_k \in \text{Cont}(X^{(k)}), \quad \text{ここで } X^{(k)} \text{ は凸閉部分集合.}$$

一般の Banach 空間においても Cauchy 問題 (4.3) が解をもてば条件 (C), (S) のもとで approximation (4.5) がえられる. すなわちつぎの定理 (Lax の定理 [22] の拡張) がある.

定理 4.3 ([17]) X は Banach 空間, $A \in D(A)$, $R(A) \subset X$ なる operator とする.

(i) 各 $x \in D(A)$ に対して Cauchy 問題 (4.3) が解 $u(t; x)$ をもつ

(ii) (C) および (S)

を仮定すれば, $x \in D(A)$ に対して

$$(4.6) \quad u(t; x) = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k^{[t/h_k]} x, \quad t \geq 0,$$

また (4.6) は任意の有限区間で一様収束である.

証明. (C) および (S) から, A は dissipative. (4.1) と (i) から, $T(t)x = U(t; x)$, $x \in D(A)$, $t \geq 0$ なる unique contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が存在する ([17]). したがって $x \in D(A)$ のとき

$$(d/dt)T(t)x = AT(t)x \quad \text{a.e. } t \geq 0.$$

$$D = \bigcup_{x \in D(A)} \{T(t)x; (d/dt)T(t)x = AT(t)x\} \text{ とおくと } D \subset D(A);$$

よって $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax$, $x \in D$. 明らかに, A on D は $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ の i.g. の restriction. また

$D_0 = D$ とおくと (2.1) より 定理 4.1 (iii) より $D = \overline{D_0}$. かくして各 $x \in \overline{D}$ に対し,

$$(4.7) \quad T(t)x = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k^{[t/h_k]} x, \quad t \geq 0$$

が有限区間で一様に成立する. $\overline{D} = \overline{D(A)}$ から (4.6) より,

終.

最後に, 系 2.3 と系 3.6 から Trotter の定理 [23; 定理 5.3] の 1 の拡張がえられる ([17]).

定理 4.4 X^* は uniformly convex, $C_k \in \text{Cont}(X)$, $\{h_k\}$ は $h_k \rightarrow 0$ なる正数列とする.

$$(i) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} h_k^{-1}(C_k - I)x = Ax, \quad x \in D(A)$$

$$(ii) \quad \overline{R(I - \lambda_0 A)} = X \quad \text{some } \lambda_0 > 0$$

ならば

(a) $\bar{A}$ is m -dissipative, and $\bar{A}$ is contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ is generated

(b) For each $x \in \overline{D(A)}$, for any finite interval I is

$$T(t)x = \lim_k C_k^{[t/h_k]} x, \quad t \geq 0.$$

注意. (a) から $T(t)x$ ($x \in D(\bar{A})$) は Cauchy 問題

$$(4.8) \quad (d/dt)u(t) \in (\bar{A})^\circ u(t), \text{ a.a. } t \geq 0, \quad u(0) = x$$

の unique な解である。したがって、この定理は“(4.3) に対する approximating scheme (4.4) が $(C), (S)$ (ただし $X^{(k)} = X$) をみたすとき、附帯条件 $\overline{R(I - \lambda_0 A)} = X$ のもとで、各 $x \in D(\bar{A})$ に対して Cauchy 問題 (4.8) は unique な解を持ち、かつこの解に近似解が収束する”ことを意味している。

References

1. H. Brezis and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions on convex sets, to appear.
2. F. E. Browder, Nonlinear equation of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 867-874.
3. M. G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, Jour. Func. Anal. 3 (1969),

376 - 418.

4. M. G. Crandall and A. Pazy, On accretive sets in Banach spaces, to appear in Jour. Func. Anal.

5. P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semi-groups, Jour. Func. Anal., 2 (1968), 238-242.

6. J. R. Dorroh, Some classes of semi-groups of nonlinear transformations and their generators, Jour. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 437-455.

7. J. R. Dorroh, A nonlinear Hille-Yosida-Phillips theorem, Jour. Func. Anal., 3 (1969), 345-353.

8. E. Hille and R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., 31, 1957.

9. T. Kato, Nonlinear semi-groups and evolution equations, Jour. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508-520.

10. T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, to appear in Proc. Symposium Nonlinear Func. Anal. A. M. S.

11. Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, Jour. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493-507.

12. Y. Kōmura, Differentiability of nonlinear semi-groups, Jour. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375-402.

13. I. Miyadera, Note on nonlinear contraction semi-groups, Proc. Amer. Math. Soc., 21 (1969), 219-225.

14. I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semi-groups, Tôhoku Math. Journ., 21 (1969), 221 - 236.
15. I. Miyadera, On the convergence of nonlinear semi-groups II, Jour. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 403 - 412.
16. I. Miyadera, Nonlinear semi-groups の収束について, 数学論文集, 早大・教育・数学教室, 5 (1969).
17. I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semi-groups of nonlinear operators, to appear in Tôhoku Math. Jour.
18. J. W. Neuberger, An exponential formula for one-parameter semi-groups of nonlinear transformations, Jour. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 154 - 157.
19. S. Oharu, Note on the representation of semi-groups of nonlinear operators, Proc. Japan Acad., 42 (1966), 1149 - 1154.
20. S. Oharu, Nonlinear semi-groups in Banach spaces, to appear.
21. S. Oharu, On the generation of semi-groups of nonlinear contractions, to appear.
22. R. D. Richtmyer and K. W. Morton, Difference method for initial-value problems, Interscience, 1967.
23. H. F. Trotter, Approximation of semi-group of operators, Pacific Jour. Math., 8 (1958), 887 - 919.
24. J. Watanabe, Semi-groups of nonlinear operators on closed convex sets, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 219 - 223.

25. G.F. Webb, Representation of semi-groups of nonlinear transformations in Banach spaces, to appear in Jour. Math. and Mech.
26. G.F. Webb, Nonlinear evolution equations and product integration in Banach spaces, to appear.
27. K. Yosida, Functional analysis, Springer, 1965.