

或る連分数の g 進展開における digits について

国際純大 田村 純一 (Jun-ichi Tamura)

§0 序

正則連分数 (simple continued fraction) 展開と g 進小数展開を同時に explicit に表わすような無理数については、殆ど知られていない。(Bundschuh [2]) 連分数

$$[0; 1, g, g, g^2, g^3, g^5, g^8, \dots] \quad (2 \leq g \in \mathbb{Z})$$

の g 進展開が

$$(1) \quad (g-1) \sum_{n=1}^{\infty} g^{-[\alpha n]}, \quad \alpha = (1+\sqrt{5})/2$$

で与えられることは、既に知られている (Adams-

Ravison [1]), ことには、その別証明を与えることで

g 進小数の digits たちの間に成り立つ興味深い事実について述べる。

§1 準備

数列 $\{u_n\}_{n=-1}^{\infty}$ は、

$$u_{-1} = 0, u_0 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で決められ Fibonacci 数列とし, A_n は, "再帰的":

$$(1) \quad \begin{cases} A_{2n+2} = A_{2n}, 3, A_{2n+1} \\ A_{2n+3} = A_{2n+1}, 2, A_{2n+2} \end{cases} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

で定義された有限数列とする. 但し $A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset$

($\emptyset$ は空集合) $A_4 = 3, A_5 = 2, 3$ とする. たとえ

$$\text{ば, } A_6 = A_4, 3, A_5 = 3, 3, 2, 3$$

$$A_7 = A_5, 2, A_6 = 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3$$

となる. このとき, 数列 A_n の長さは $u_{n-2} - 1$ となるので
数列 A_n の和分

$$B_n = b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \dots, b_{u_{n-2}}^{(n)}$$

を n の偶奇によつて $b_i^{(n)} = 0$ または 1 とおき, 決める
ことかできる. 即ち, $n = 4, 5, 6, \dots$ に対し

$$b_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{(n)} + \begin{cases} 0 & (n: \text{偶数}) \\ 1 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$(a_k^{(n)} = \text{数列 } A_n \text{ の } k \text{ 項目})$$

とする. 又 $B_0 = 0, B_1 = 1, B_2 = 0, B_3 = 1$ (長さ 1
の数列) とする. このとき 次のようになります:

$$(2) \quad b_{u_{n-2}}^{(n)} = u_n - 2 \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

$$(3) \quad b_1^{(n)} + u_{n-1} - b_{u_{n-3}}^{(n-1)} = \begin{cases} 2 & (n: \text{偶数}) \\ 3 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

$$(4) \quad B_{n+1} = B_{n-1}, B_n + u_{n-1}$$

(2) より (3), (3) より (4) が成り立つ. (4) の plus の記号は,

たとえば, $\beta = 2, 5, 7, 10$ に対し $\beta + 8 = 10, 13, 15, 18$
等となることを示し, (4) の右辺の comma は §1 の (1) と
同様の意味をもつ)

§2 連分教によつて定義された関数 $\Theta(x)$.

この § 以下, 証明は, 一切省略する. まず, 正則連分
教 $[0; x^{u_1}, x^{u_2}, x^{u_3}, \dots, x^{u_{n-2}}]$ ^{表わす有理関}
数を $\theta_n(x)$ とし,

$$(5) \quad \theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(x) = [0; x^{u_1}, x^{u_2}, x^{u_3}, \dots]$$

とおく. ($x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$ の時, 上の極限は有限確定延
をもつ) 連分教 (5) の n 近似分教を通常記号で,

$p_n(x)/q_n(x)$ とすると, p_n, q_n の 1 階関係式より, 帰
納法で

$$(6) \quad p_n(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ l \notin \beta_n}}^{u_n-1} x^l, \quad q_n(x) = \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

が示される. ここで

$$\theta_n(x^{-1}) = p_n(x^{-1})/q_n(x^{-1}) = \Theta_n(x)$$

とおくと,

$$1 - \Theta_n(x) = \left(\sum_{l=0}^{u_n-1} x^{-l} - \sum_{\substack{l=0 \\ l \notin \beta_n}}^{u_n-1} x^{-l} \right) / \sum_{l=0}^{u_n-1} x^{-l}.$$

(2) より, 有限数群 β_n の各項からなる集合は, $\{0, 1, \dots, u_n-1\}$
に含まれることに注意して,

$$1 - \Theta_n(x) = P_n(x) / Q_n(x),$$

$$P_n(x) = \sum_{l \in B_n} x^{u_{n-1}-l}, \quad Q_n(x) = \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

と書ける。そこで、数組 B_n の項を逐に並べかえた数組 $\overleftarrow{B_n}$ の各項の符号をかえた数組 $-\overleftarrow{B_n}$ を考え、

$$D_n' = -\overleftarrow{B_n} + u_n - 1$$

と置く。即ち、 D_n' の m 項を $d_m^{(n)}$ とするとき、

$$d_j^{(n)} = -b_{u_{n-2}-j+1} + u_n - 1, \quad (j = 1, 2, \dots, u_{n-2})$$

となる。このとき、(2)より D_n' の初項は、 n の偶・奇に関係なく常に 1 に等しい。今、 D_n' の差をとって、

$$C_n := \Delta D_n' := \left\{ -b_{u_{n-2}-j}^{(n)} + b_{u_{n-2}-j+1}^{(n)} \right\}_{j=1}^{u_{n-2}-1}$$

と置く。 D_n' の作り方から、 $C_n = A_n$ である。

$$(7) \quad 1 - \Theta_n(x) = \sum_{l \in D_n'} x^l / \sum_{l=0}^{u_n-1} x^l$$

かゝりた。 ~~したがって~~ $\Delta D_n' = C_n$ は次をみたす：

$$(8) \quad \begin{cases} C_{2n+4} = C_{2n+3}, 3, C_{2n+2} \\ C_{2n+5} = C_{2n+4}, 2, C_{2n+3} \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{例} \quad C_1 = C_2 = C_3 = \emptyset, \quad C_4 = 3, \quad C_5 = 3, 2.$$

$$\text{たとえば,} \quad C_6 = 3, 2, 3, 3$$

$$C_7 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2$$

$$C_8 = 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3$$

等となる. 数列 C_{n+1} は数列 C_n を "延長" したものであるか.

さ. $C_n = \{C_m\}_{m=1}^{u_{n-1}-1}$ と書ける. 従って,

$$C = \lim C_n = \{C_m\}_{m=1}^{\infty}$$

が定義される. (4) で $n \rightarrow \infty$ とし,

$$\textcircled{H}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \textcircled{H}_n(x)$$

$$(9) \quad = [0; 1, x^{-u_1}, x^{-u_2}, x^{-u_3}, x^{-u_4}, \dots]$$

$$= 1 - (1-x) \sum_{l \in D'} x^l, \quad |x| < 1$$

を得る. $\Delta D'$ は, C の和分, i.e.,

$$\Delta D' = C \quad \& \quad D' \text{ の初項} = 1$$

で与えられる無限数列である.

Polya - Carleson の定理を援え, 関数 $\textcircled{H}(x)$ の自然境界は, 単位円 $|x|=1$ であり, 従って, $\textcircled{H}(x)$ は超越関数

にあることがわかる. $\Delta D'$ の中に 1 が 現れる (かき消す) ことに

注意して ($\Delta D' = C$ は, 2 と 3 と 4 からなる数列) (g) より

次を得る:

$$(10) \quad \textcircled{H}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n \quad \text{としたとき,}$$

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_n = \begin{cases} -1 & (n \in D') \\ +1 & (n \in D'+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

§ 3 $\textcircled{H}(g^{-1})$ の g 進展論.

(10) により, $x = 1/g$ ($2 \leq g \in \mathbb{Z}$) を代入すれば,

$$\begin{aligned} \textcircled{H} (g^{-1}) &= [0; 1, g, g, g^2, g^3, g^5, g^8, \dots] \\ (11) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n g^{-n}, \end{aligned}$$

但し,

$$k_n = \begin{cases} g-1 & (n \notin D := D+1) \\ 0 & (n \in D) \end{cases}$$

であることが知られる。④_n(g^{-1}) の g -進展開は、周期が U_n の無限循環小数と等しい。④(g^{-1}) は、無限正則連分式に等しいから、勿論、無理数であり、④(g^{-1}) の g -進展開に於ける digits $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、 g と 0 のみからなる非同期的で無限列であることがわかる。従って数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ から他に、どのような性質を導いていくか興味のあるところである。これについて以下に述べ併せて得られるいくつかの結果について述べる。

§4 数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ について。

任意の正整数は、隣接しない Fibonacci 数の和として、一意に書けることはよく知られている。即ち、 $0 < n \in \mathbb{Z}$ に対し正整数 m 及び $u_{j_1}, \dots, u_{j_m}$ が一意に決まり、

$$(B) \quad n = \sum_{l=1}^m u_{j_l} \quad (m > 1 \text{ の時は})$$

を満たす。但し、 $j_1 > 0$, $j_{l+1} - j_l > 1$ ($l=1, 2, \dots, m-1$) とする。このとき、 $j_1 = j_1(m)$ は n の階数と考えられる。

そこで、次がなりたつ：

$$(12) \quad \mathcal{Q} = \left\{ 2 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \right\}$$

$$= \left\{ n; j_1(n) \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

(注. 数列 $\mathcal{Q}$ は単調数列なので集合と同一視した)

(注. 空列 $\sum_{k=1}^0 c_k = 0$ とする)

$$(13) \quad c_n = \begin{cases} 3 & (j_1(n) = \text{odd}) \\ 2 & (j_1(n) = \text{even}) \end{cases}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

これより, (11) を併せて 数列 $\mathcal{C} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ と 数列 $\mathcal{K} = \{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, 文字の違いを除いて, 本質的に同じ列であることがわかる. (つまり, $k (= g-1) \rightarrow 3, 0 \rightarrow 2$

で表される 2 文字の置換により, 数列 $\mathcal{K}$ は数列 $\mathcal{C}$ に移る) 従って, $\textcircled{A}(g-1)$ の g 進小数表示は 数列 $\mathcal{C}$ を書き

下せば 機械的に 得られる:

$$(14) \quad \begin{array}{cccccccccccccccc} \mathcal{C} : & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \end{array}$$

$$\textcircled{A}(g-1) = 0.k0k0k0k0k0k0k0 \dots$$

ここで 数列 $\mathcal{C}$ は, "再帰接続関係" (8) より得られる.

と 3 で 数列 $\mathcal{C}$ は, 次の驚くべき性質 (証明は (12)

(13) から既に明らかである) を持っている:

$$(15) \quad \text{数列 } \mathcal{C} = \{c_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ の } (2 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k) \text{-番目} \\ \text{の項は } 2 \text{ に等しく, それ以外の項は } 3 \text{ に等しい.}$$

この (15) より 数列 $\mathcal{C}$ を機械的に (8) を使わずに

求められる:

(15)' $\mathcal{C}: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$
 $\mathcal{D}: 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, \dots$
 $\mathcal{D}: 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, \dots$

説明: 数列 $\mathcal{C}$ と数列 $\mathcal{D}$ の和列は, それぞれ 3, 2 とする. 3 行目の最初の数から 1 行目の 2 に 0 印をつける. 1 行目の 0 印の下には 2 と書く. 2 行目の和分をとると 2, 5, 7 (3 行目) が得られる. 1 行目の 2, 5, 7 に 0 印をつける. (2 には既に 0 印がついていて, 3 の 2, 5 と 7 には 4 に 0 印をつける) 0 印の下 (2 行目) に 2 と書いて, 既に 0 印がついていて ~~数~~ 数より左にある 0 印の数 の下には 3 と書き入れる. 2 行目の和分をとって 3 行目の 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20 が得られる. 1 行目の ~~4, 10, 13~~ 10, 13, 15, 18, 20 に新しく 0 印をつける. 以下同様にこれをくりかえす.

また, (8) より, 数列 $\mathcal{C}$ は, substitution

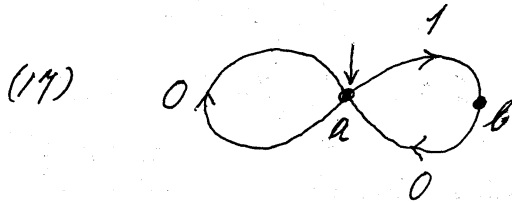
$$\mathcal{T}: \begin{cases} 3 \mapsto 32 \\ 2 \mapsto 3 \end{cases}$$

により, $\mathcal{C}$ が生成される:

$$(16) \quad 3 \mapsto 3, 2 \rightarrow 3, 2, 3 \rightarrow 3, 2, 3, 3, 2 \rightarrow \dots$$

即ち, $\mathcal{C}$ は constant length でない substitution ¹⁵ により生成される "automaton" (pseudo-automaton) の生成

する列と考えられる。(13)に添えられは... $\mathcal{C}$ は pseudo-automaton:



(13) 2進法の代りに

Fibonacci representation (84, (B)) を使う。即ち $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ の代りに $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を base にとる。

によって生成される列

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ a & b & a & a & b & a & b & \dots \end{array}$$

$$(3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, \dots)$$

と考えられる。

他方、次の正規連分母 (regular continued fraction)

$$\Phi(x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{1 + \frac{x^5}{1 + \frac{x^8}{1 + \frac{x^{13}}{\dots}}}}}}}, \quad |x| < 1$$

(右辺の x の肩の数は Fibonacci 数)

で与えられた関数についても同様の結果を得る。たとえば;

$k = g-1$ として, (14) に対応する結果:

(18)

$$\Phi(g^{-1}) = 0.0 \underline{k0k0k0k0} \dots$$

$$\mathcal{C} = 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, \dots = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$$

($\mathcal{C}$ は 2, 1 の列として (8) と同様 1-12 と与えられた) かつ, (15)' に対応する結果:

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{C} &: \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}, 5, \textcircled{6}, 7, \textcircled{8}, \textcircled{9}, 10, \textcircled{11} \\ \mathcal{E} &: 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, \dots \\ \mathcal{F} &: 1, 3, 5, 6, 8, 9, 11, \dots \end{aligned} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$$

等が示される. ここで, 連分数の直接の表現によって,

$$\Phi(x) = x \textcircled{+} (x) \quad \text{((14), (18) より)} \quad (\text{列 } \mathcal{K} \text{ は 数列 } \mathcal{K} \text{ に})$$

であることが確かめられ, 列 $\mathcal{C} = \{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ は,

列 $\mathcal{E} = \{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ と文字の違いを明らかにすれば, 同一の pattern を持つこととわかる. 従って, 列 $\mathcal{C}$ は

$$(20) \quad c_n = \begin{cases} 3 & \text{iff } n \in \mathcal{F} = \{f_m\}_{m=1}^{\infty} \\ 2 & \text{iff } n \in \mathcal{D} = \{d_m\}_{m=1}^{\infty} \end{cases}$$

によって与えられることとわかる. ここで, (15), (18), (20)

$$\text{より, } d_n = f_n + n$$

$$\mathcal{D} \cup \mathcal{F} = \mathbb{N}, \quad \mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \emptyset$$

であることがわかる. これより $\mathcal{D}$ 及び $\mathcal{F}$ は $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ としたとき,

$$(21) \quad \begin{cases} d_n = \lceil \alpha^2 n \rceil \\ f_n = \lceil \alpha n \rceil \end{cases}, \quad n=1, 2, \dots$$

~~を得られる~~ ^{(これは $\mathcal{F}$ の (A))} によって与えられることがわかる. ~~また~~ も与えられた.

また, 連分数の級数表示 (Euler's transformation) を用いれば, T_n を不定方程式の解の個数

$$T_n = \#\{(k, l, m) \in \mathbb{N}^3; u_{2m} \cdot (k-1) + u_{2m+2} \cdot l = n\}$$

で与えられる数としたとき,

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \textcircled{H}(x) &= \frac{1}{1+x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{u_{2m+2}}}{(1-x^{u_{2m}})(1-x^{u_{2m+2}})} \\
 &= \frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} (T_n - 2T_{n+1} + T_{n+2}) x^n, \quad |x| < 1
 \end{aligned}$$

を得る。さらに $\{T_n - 2T_{n+1} + T_{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ は さらに $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ の漸化式を2回とったものであることに注意して、(9)(21)及び(22)を使えば、

$$\begin{aligned}
 (23) \quad T_n &= \frac{1}{2}n - \left\lfloor \frac{3-\sqrt{5}}{2}(n-1) \right\rfloor + \frac{1}{4}(-1)^{n-1} - \frac{3}{4} \\
 &\sim \frac{\sqrt{5}-2}{2}n
 \end{aligned}$$

を得る。一般に、不定方程式

$$xx' + yy' = n$$

の正整数解の個数については、興味あるが、これに数論的な制限をつけて、解の個数を考えたものとしては、Tonkov の論文 [4] などがある。

以上の諸結果のうち (16) については、M. Mendès France また、(14) については、C. Mauduit に教示を得たことを記し、併せて感謝の意を表す。

最後に、 $\textcircled{H}(x)$ の他の超越性については述べた。既に見たように、 $\textcircled{H}(x)$ は、級数

$$f_d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{[dn]}, \quad d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と結びつけられるが α を一般の 2 次無理数としたとき,
 $f_n(g^{-1})$ ($0 \leq g \in \mathbb{Z}$) は超越数であることは知られている。
 従って, 命題 ④ (g^{-1}) も超越数である。最近 D. W.
 Masser が相異なる 1 より小さい代数的数たちを $f_n(x)$
 に代入した値たちの代数的独立性を示した。 ([3])

これに対して, finite pseudo-automaton による 2 と 5 4
 の並びを digits とする無限小数の超越性については

④ (g^{-1}) の他には, 一般に何も知られていない。文献:

1. Adams, W. W. and Davison, J. G.: A remarkable class of continued fractions, Proc. AMS vol. 65 No. 2 (1974), p. 194 -
2. Bundschu, P.: Über eine Klasse reeller transzendenter Zahlen mit explicit angegebener g -adischer und Kettenbruch-Entwicklung, Journal für die reine und angewandte Math. (Crelle) 318 (1980), p. 110 -
3. Masser, D. W.: An algebraic independence theorem (1-1)
4. Мотков, М.: Новые применения метода «стаканчиков» Виноградова, Труды математического института АН СССР (1984) том 163, p. 234 -