

正標数の局所自明変形

宮本 拓哉*

December 30, 2025

本稿は城崎代数幾何学シンポジウム 2025 で話したことの報告書である。¹ 局所自明変形についてその定義から解説する。主結果は、正標数の特異曲線であって、その局所自明変形関手が Schlessinger の H_1 条件を満たさない例を構成することである。これは [2] の問いに対する否定的な答えを与えている。 H_1 条件とは関手の表現可能性に関わるものであり、small extension に沿った関手のファイバーの大きさを制限する条件である。局所自明変形関手についてそのファイバーの構造をある程度明示的に決定する方法を与える。それには二つの完全列が関わっている。これらはスキーム上の（非可換）群の層の列である。そのうちの片方の完全列が H_1 に関わっているのだが、多くの場合それは項の一つがつぶれている（例えば標数 0 のときや smooth なとき）。この事実は、それらの場合に H_1 が満たされていることの一つの説明になっている。標数 p の場合でも、degenerate しない場合に必ず H_1 の反例になるわけではない。のちほど構成する H_1 の反例では、層の全射が global section のレベルでは全射になっておらず、そのことを使って H_1 を満たさないことを示せる。本稿は [7]、[6] にもとづく。

1 局所自明変形

本節では k を任意標数の代数閉体とする。まずは局所自明変形の定義を述べる。

Definition 1.1. 圏 $\mathcal{A}$ を次のように定義する。まず、 $\mathcal{A}$ の対象は k 上のアルティン局所環 $A = (A, \mathfrak{m}_A)$ であって、その剰余体が k であるもの全体とする。 $\mathcal{A}$ の射は k 代数の局所準同型とする。□

Definition 1.2. X_0 を k 上の代数的スキームとする。 A を $\mathcal{A}$ の対象とする。

*東京大学数理科学研究科 miyamoto-takuya@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

¹城崎代数幾何学シンポジウム 2025 の世話人の皆さまに心より感謝申し上げます。

このとき、次の cartesian square

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} A & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k \end{array}$$

は、 π が flat であるとき、 X_0 の A 上の変形と呼ばれる。簡単のためこれを X/A や X と書く。 $X = X_0 \times_k A$ のとき、これを自明変形と呼ぶ。□

上の状況で、 X_0 と X は同じ位相空間をもつため、変形を開集合に制限することが可能である。

Definition 1.3. X/A を X_0 の A 上の変形とする。 X/A が局所自明であるとは、任意の点 $x \in X_0$ に対し、開近傍 $x \in U$ であって、 $X|_U$ が自明変形であることをいう。□

Remark 1.3.1. X_0 が smooth のとき、任意の変形は局所自明である。

アルティン局所環 A を固定したとき、変形全体の集合 (同型除く) を $\mathrm{Def}_{X_0}(A)$ と書く。局所自明変形全体は $\mathrm{Def}'_{X_0}(A)$ と書く。 Def_{X_0} と Def'_{X_0} は covariant functors $\mathcal{A} \rightarrow (\text{sets})$ をなし、前者を変形関手、後者を局所自明変形関手と呼ぶ。これらのような関手 $\mathcal{A} \rightarrow (\text{sets})$ を functor of artin rings という。Functor of artin rings が、 $R = k[[t_1, \dots, t_n]]/I$ の形の完備環で表現可能かどうかについて、Schlessinger [8] は必要十分条件を与えた。それは 4 つの条件 H_1, H_2, H_3, H_4 からなる。本稿では主に H_1 を扱う。

Definition 1.4. $F : \mathcal{A} \rightarrow (\text{sets})$ を functor of artin rings とする。 F が H_1 を満たすとは次が成立していること：次を $\mathcal{A}$ 内の任意の cartesian diagram とする。

$$\begin{array}{ccc} \overline{A} & \longrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow g \\ A' & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

ただし cartesian というのは $\overline{A} = \{(a, b) \in A' \times A'' \mid f(a) = g(b)\}$ ということである。 f が全射であると仮定する。組 (X, Y) を $X \in F(A'), Y \in F(A'')$ であって $F(A)$ での像が同じものとする。このような任意の組に対して、そのリフトが $F(\overline{A})$ にとれる。(次図)

$$\begin{array}{ccc} \exists Z & \dashrightarrow & Y \in F(A'') \\ \downarrow & & \downarrow F(g) \\ X \in F(A') & \xrightarrow{F(f)} & F(A) \end{array}$$

□

ここで、 Def_{X_0} は任意標数で H_1 条件を常に満たしている。([8]) また、標数 0 では Def'_{X_0} も H_1 条件を満たしている。([2][1]) 正標数でも、 X_0 が smooth なら二つの関手は一致するので H_1 は満たされている。本稿では正標数において Def'_{X_0} が H_1 条件をみたさないような X_0 を構成する。

本節の最後に H_1 条件の group action による解釈を説明する。まず、 H_2 条件のもとでは F について自然な群作用が定まることが示される。

Definition 1.5. Small extension とは、完全列

$$0 \rightarrow (t) \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow 0$$

であって、 $A' \rightarrow A$ は $\mathcal{A}$ の全射であり、 $(t) \simeq k$ であるもののこと。 □

Proposition 1.6 ([8]). $F : \mathcal{A} \rightarrow (\text{sets})$ を functor of artin rings とする。 F が H_2 条件を満たしていると仮定する（たとえば $\text{Def}_{X_0}, \text{Def}'_{X_0}$ は任意標数で H_2 を満たしている。詳細は省略）。任意の small extension $0 \rightarrow (t) \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \rightarrow 0$ を取る。 $k[\varepsilon] := k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ と定める。このとき、任意の $X \in F(A)$ に対して、ファイバーへの自然な群作用

$$F(k[\varepsilon]) \curvearrowright F(f)^{-1}(X)$$

がある。（言い換えると、自然な群作用 $F(k[\varepsilon]) \curvearrowright F(A')$ があって、 $F(f)$ の各ファイバー上で作用している。） □

このもとで、 H_1 はファイバーでの transitivity だと解釈できる。

Theorem 1.7 ([8]). 上の Proposition で、 F が H_1 条件を満たしていると仮定する。もしファイバー $F(f)^{-1}(X)$ が空でないなら、 $F(k[\varepsilon])$ はそのファイバーに transitive に作用する。 □

直感的に言うと、ファイバーの大きさが $F(k[\varepsilon])$ で押さえられるということが H_1 に対する必要条件になる。後ほど構成する H_1 の反例では、 $F = \text{Def}'_{X_0}$ に対し、ファイバーが $\text{Def}'_{X_0}(k[\varepsilon])$ より大きくなることを確かめることで H_1 を満たさないことを示す。

2 Hasse-Schmidt derivations

以降は k を標数 $p > 0$ の代数閉体とする。本節は [6] にもとづく。ファイバーの構造を調べるための道具として Hasse-Schmidt derivation (HS-derivation) を導入する。ここでは少し一般化した定義を用いる。

Definition 2.1. A を $\mathcal{A}$ の対象とする。 R を k 代数とする。 HS-derivation の群 $\mathrm{HS}_k^A(R)$ は次の要素からなる: A -自己同型 $A \otimes_k R \rightarrow A \otimes_k R$ であって、 $\mathfrak{m}_A$ で割ると恒等写像 $k \otimes_k R \rightarrow k \otimes_k R$ となるもの。 $\mathfrak{m}_A$ は A の極大イデアルである。 $\square$

Remark 2.1.1. 上の定義で、 $A = k[t]/(t^m)$ の形とすると普通の HS-derivation の定義と一致する。 [9][4]

Remark 2.1.2. $\mathcal{A}$ の射 $B \rightarrow A$ に対して、テンソルで誘導される自然な射 $\mathrm{HS}_k^B(R) \rightarrow \mathrm{HS}_k^A(R)$ がある。 また、 k 代数の局所化 $R \rightarrow R'$ に対しても自然に $\mathrm{HS}_k^A(R) \rightarrow \mathrm{HS}_k^A(R')$ が誘導される。

Remark 2.1.3. k -代数的スキーム X_0 に対して、 HS-derivation の群の層 $\underline{\mathrm{HS}}_k^A$ が自然に定義される。 この層の 1 次チェックコホモロジーは A 上の局所自明変形と同一視される。(次の定義)

Definition 2.2 (例えば [3] を参照). S を位相空間とし、 $\mathcal{F}$ を S 上の非可換群の層とする。 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を S の開被覆とする。

1-コサイクルとは $g_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ の族であって

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$$

を満たすものである。

2つの 1-コサイクル $(g_{ij}) (g'_{ij})$ は

$$g'_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}$$

となる $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が存在するとき同値であるという。 この同値類の集合を $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ と書く。

$$\check{H}^1(S, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

を X 上の非可換チェックコホモロジーと定義する。これは $\{1\}$ を distinguished element とする pointed set となる。 $\square$

上の Remark により、small extension $0 \rightarrow (t) \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \rightarrow 0$ があるとき

$$\mathrm{Def}'_{X_0}(f) : \mathrm{Def}'_{X_0}(A') \rightarrow \mathrm{Def}'_{X_0}(A)$$

は

$$\check{H}^1(X_0, \underline{\mathrm{HS}}_k^{A'}) \rightarrow \check{H}^1(X_0, \underline{\mathrm{HS}}_k^A)$$

と同一視される。

上の射はある種の非可換チェックコホモロジーの long exact sequence から誘導されるものである。それを記述するのが HS-derivation に対する obstruction である。その obstruction は coherent となる。

Theorem 2.3. 任意の small extension $\Phi : 0 \rightarrow (t) \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow 0$ を取る。 R を有限形 k -代数とする。このとき、有限 R -加群 Ob_R^Φ が存在して、次の完全列が存在する:

$$\text{HS}_k^{A'}(R) \rightarrow \text{HS}_k^A(R) \rightarrow \text{Ob}_R^\Phi \rightarrow 0.$$

また、 Ob_R^Φ は R の局所化に関して compatible である、□

Remark 2.3.1. この事実は、obstrucion が first cotangent module $T_{R/k}^1$ に住んでいると考えて証明される (first cotangent module については、例えば [10] を参照)。 Ob_R^Φ は $T_{R/k}^1$ の部分群であるが、そのまま部分 R -加群とはならない (適当な i をとって、 R^{p^i} -部分加群となる)。また、 Ob_R^Φ は small extension の取り方に依存している。small extension は無限個あるのに対し、 Ob_R^Φ がとれるのは有限個しかない。このことは [6],[5] を合わせて得られる。

Remark 2.3.2. R が smooth の場合 Ob_R^Φ は常に 0 となる。また、標数 0 の場合には、HS-derivation は small extension に沿って常にリフトするのでこの場合も必然的に 0 である。このことは本質的に [4],[1] で証明されている。

Proposition 2.4. Theorem 2.3 の状況で、 $\text{HS}_k^{A'}(R) \rightarrow \text{HS}_k^A(R)$ の image を $\text{IHS}_k^\Phi(R)$ と書くことにする。このとき、次の二つの完全列が存在する:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \text{IHS}_k^\Phi(R) \rightarrow \text{HS}_k^A(R) \rightarrow \text{Ob}_R^\Phi \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \text{Der}_k(R) \rightarrow \text{HS}_k^{A'}(R) \rightarrow \text{IHS}_k^\Phi(R) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

□

Remark 2.4.1. R が smooth もしくは標数 0 のときは Ob_R^Φ が 0 のため、上側の完全列は trivial である。のちほどわかるように、このことは H_1 条件を満たすことの説明となっている。

Remark 2.4.2. k -代数的スキーム X_0 に対して、上の完全列の層のバージョンとして、 X_0 上の非可換群の層の完全列を次のように書く:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \underline{\text{IHS}}_k^\Phi \rightarrow \underline{\text{HS}}_k^A \rightarrow \text{Ob}_{X_0}^\Phi \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \text{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0}) \rightarrow \underline{\text{HS}}_k^{A'} \rightarrow \underline{\text{IHS}}_k^\Phi \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Proposition 2.5. 上の remark の完全列は、非可換チェックコホモロジーの長完全列を誘導する (X_0 上のコホモロジーである):

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow H^0(\underline{\text{IHS}}_k^\Phi) \rightarrow H^0(\underline{\text{HS}}_k^A) \rightarrow H^0(\text{Ob}_{X_0}^\Phi) \rightarrow \check{H}^1(\underline{\text{IHS}}_k^\Phi) \xrightarrow{\iota} \check{H}^1(\underline{\text{HS}}_k^A) \rightarrow \check{H}^1(\text{Ob}_{X_0}^\Phi), \\ 0 &\rightarrow H^0(\text{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) \rightarrow H^0(\underline{\text{HS}}_k^{A'}) \rightarrow H^0(\underline{\text{IHS}}_k^\Phi) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \check{H}^1(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) \rightarrow \check{H}^1(\underline{\mathrm{HS}}_k^{A'}) \xrightarrow{\pi} \check{H}^1(\underline{\mathrm{IHS}}_k^\Phi) \rightarrow \check{H}^2(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})).$$

ここで完全というのは pointed sets の意味である。 $(P_1, p_1) \rightarrow (P_2, p_2) \rightarrow (P_3, p_3)$ が完全とは P_1 の像が p_3 の逆像と等しいことを言う。□

ここで、調べたいのは $\check{H}^1(X_0, \underline{\mathrm{HS}}_k^{A'}) \rightarrow \check{H}^1(X_0, \underline{\mathrm{HS}}_k^A)$ のファイバーであったが、この射はまさに $\iota \circ \pi$ のことである。

上の完全列から群作用

$$\check{H}^1(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) \curvearrowright \check{H}^1(\underline{\mathrm{HS}}_k^{A'})$$

が定まる。これはチェックコサイクルの計算による。実は、これは 1 節の群作用と一致する ($\check{H}^1(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) = \mathrm{Def}'_{X_0}(k[\varepsilon])$ である)。この作用で $\check{H}^1(\underline{\mathrm{HS}}_k^{A'})$ を割るとそれは π の image と等しくなる。

$$\check{H}^1(\underline{\mathrm{HS}}_k^{A'}) / \check{H}^1(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) \simeq \mathrm{Im} \pi.$$

つまり、 π は群作用の軌道を 1 点に潰す写像である。この事実を使って群作用がファイバーで transitive でないことを示せば、 H_1 を満たさないことを証明できる。

3 主結果

この節でも k を標数 $p > 0$ の代数閉体とする。まず H_1 条件に対する反例となる特異曲線を構成する。

Theorem 3.1. 曲線 C_0 を $\mathrm{Spec} k[t^p, t^{p+1}]$ と $\mathrm{Spec} k[s^{2p+1}, s^{2p+2}]$ を smooth loci で $t \mapsto s^{-1}$ により張り合わせたものとする。このとき、 C_0 の局所自明変形関手 Def'_{C_0} は H_1 条件を満たさない。□

この定理の証明に上の長完全列を使う。 $X_0 = C_0$ として、small extension には

$$\Phi : 0 \rightarrow (\lambda^p) \rightarrow k[\lambda]/\lambda^{p+1} \rightarrow k[\lambda]/\lambda^p \rightarrow 0$$

をとる。この場合に上の完全列を考察すると、次がわかる。

(1) $\check{H}^2(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) = 0$ より、

$$\check{H}^1(\underline{\mathrm{HS}}_k^{A'}) / \check{H}^1(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) \simeq \mathrm{Im} \pi = \check{H}^1(\underline{\mathrm{IHS}}_k^\Phi).$$

とくに、 $\{1\} \in H^0(\underline{\mathrm{HS}}_k^A)$ を trivial cycle とすると、 $(\iota \circ \pi)^{-1}(\{1\}) \subset \check{H}^1(\underline{\mathrm{HS}}_k^{A'})$ を $\check{H}^1(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0}))$ の群作用で割るとそれは $\iota^{-1}(\{1\})$ に等しい。

(2) 曲線の具体的な構成を用いて計算すると、global section の射

$$H^0(\underline{\mathrm{HS}}_k^A) \rightarrow H^0(\mathrm{Ob}_{X_0}^\Phi)$$

が全射でないことがわかる。これに exactness を使うと、 $\iota^{-1}(\{1\})$ が 2 点以上からなることがわかる。

(3) 上の二つを合わせると、 $\mathrm{Def}_{X_0}'(A') \rightarrow \mathrm{Def}_{X_0}'(A)$ の自明変形のファイバーに対する $\mathrm{Def}_{X_0}'(k[\varepsilon])$ の群作用は、transitive でないことがわかる。

これにより、 Def_{X_0}' が H_1 条件を満たさないことが示せ、Theorem の証明が完了した。また、同様の考察により、obstruction が 0 のときは常に群作用が transitive になっていることがわかり、 H_1 を満たしていることの説明となっている（あくまで H_1 条件のための必要条件であり、十分ではない）

最後に、一般的な状況に戻って、ファイバーの構造に関する定理を述べて終わる。先ほどは trivial cycle のファイバーを考えたが、一般のファイバーについても次が言える。

Theorem 3.2. X_0 を k -代数的スキームとする。

$$\Phi : 0 \rightarrow k \cdot t \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow 0$$

を small extension とする。 $X \in \mathrm{Def}_{X_0}'(A)$ をとる。

$$\alpha : \mathrm{Def}_{X_0}'(A') \rightarrow \mathrm{Def}_{X_0}'(A)$$

とする。このとき、

(1) X に対して

$$v_1(X) \in H^1(X_0, \mathrm{Ob}_{X_0}^\Phi)$$

が存在する。もし $v_1(X) \neq 0$ なら $\alpha^{-1}(X) = \emptyset$ である。

(2) $v_1(X) = 0$ と仮定する。このとき、次の全単射がある：

$$\alpha^{-1}(X)/H^0(\mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0})) \simeq \ker \nu_X^\Phi / L(X).$$

ここで $L(X) \subset H^0(X_0, \mathrm{Ob}_{X_0}^\Phi)$ かつ $\nu_X^\Phi : H^0(X_0, \mathrm{Ob}_{X_0}^\Phi) \rightarrow H^2(X_0, \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_{X_0}))$ は非可換チェックコホモロジーにより定まっている（詳細は [6]）

(3) もし X_0 が smooth algebraic scheme に閉埋め込みできるなら、 $\ker \nu_X^\Phi$ は $H^0(X_0, \mathrm{Ob}_{X_0}^\Phi)$ の k -部分アフィン線型空間であり、平行移動を除いて一意となる。

□

References

- [1] Benjamin Bakker, Henri Guenancia, and Christian Lehn, *Algebraic approximation and the decomposition theorem for Kähler Calabi-Yau varieties*, Invent. Math. **228** (2022), no. 3, 1255–1308. MR 4419632
- [2] Hubert Flenner and Siegmund Kosarew, *On locally trivial deformations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 4, 627–665. MR 918518
- [3] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn, *Algebraic geometry I. Schemes— with examples and exercises*, second ed., Springer Studium Mathematik—Master, Springer Spektrum, Wiesbaden, [2020] ©2020. MR 4225278
- [4] Hideyuki Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Translated from the Japanese by M. Reid. MR 879273
- [5] Takuya Miyamoto, *Finiteness of leaps of modules of integrable derivations of algebras of finite type*, 2025.
- [6] ———, *Hasse-schmidt derivations and locally trivial deformations in positive characteristic*, 2025.
- [7] ———, *Pathology of formal locally-trivial deformations in positive characteristic*, 2025.
- [8] Michael Schlessinger, *Functors of Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 208–222. MR 217093
- [9] Friedrich Karl Schmidt and Helmut Hasse, *Noch eine begründung der theorie der höheren differentialquotienten in einem algebraischen funktionenkörper einer unbestimmten. (nach einer brieflichen mitteilung von f.k. schmidt in jena).*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) **1937** (1937), 215 – 237.
- [10] Edoardo Sernesi, *Deformations of algebraic schemes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR 2247603