

ゲージ場及びスピン格子系の相転移^{*})

A. A. ミグダル (川畑有郷訳)

格子系の臨界現象を近似的に記述する簡単な recursion equation を提案する。d 次元のスピン系と 2d 次元のゲージ系に対する方程式は一致する。興味ある結果は、2 次元 Heisenberg model 及び 4 次元 Yang-Mills model で転移温度が 0°K になることである。これは、場の理論の asymptotic freedom に対応している。

Introduction

第 2 種の相転移は、きわ立った普遍性をもっている。臨界領域では、系のミクロな構造は本質的ではなく、系の次元及び内的対称性の群のみが重要である。内的対称性が高くなると、相転移は起りにくくなる。即ち、ordered phase が存在しはじめる次元 d_c — 臨界次元数 — が大きくなる。たとえば、離散的な群 $SO(1)$ (Ising model) に対しては $d_c = 1$ 、連続的な群 $SO(n)$ (Heisenberg model) に対しては $d_c = 2$ である。最近、群のパラメーターが格子上の点に依存する様なゲージ場の系が導入された。¹⁾ 連続的ゲージ群に対しては、 $d_c = 4$ であると期待する理由がある。この様な系は、ゲージ不変な状態スペクトルを持った相対論的場の理論に対応する。この際、不変でない object (quark) は、不変な object (Hadron) の内部に、長距離力により引きとめられる。

著者の論文²⁾において、ゲージ場系の臨界現象を記述する recursion equation を提案した。

以下では同じ方法を用いて、スピン系に対する recursion equation を求める。ゲージ場の方程式と同様に、空間次元への依存性が明瞭な形で表されている。この時、d 次元のスピン系と 2d 次元のゲージ場系との間に、注目すべき類似性がある。即ち、これらに対する recursion equation が一致する。したがって、特に離散的群に対して $d_c = 2$ ゲージ場の連続的群に対して $d_c = 4$ である。一般には recursion equation の数値解に

*) JETP 69 (1975) 1457 なお、A. A. Migdal JETP 69 (1975) 810 「Recursion Equation in Gauge Field Theories」の訳が素粒子論研究 5月号に掲載されます。

よって求められる臨界温度や臨界指数も $d-d_c$ のべきで展開できる。臨界指数に対する展開の0次と1次の項は正確である。この様な関連で、我々の方程式は、スピン系に対して $4-d$ での展開の第一項を与える Wilson³⁾ の方程式に似ている。

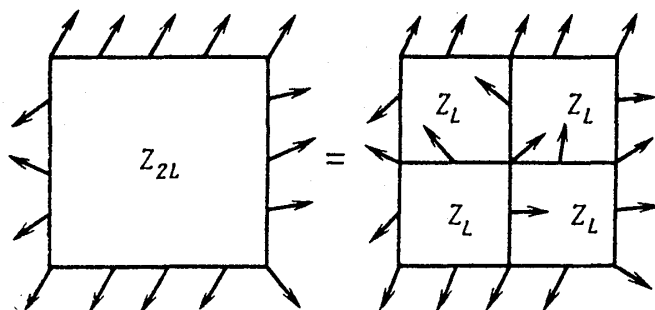
1. 正確な recursion formula

2次元の Heisenberg model を考察することにして、それに対する Z-functional を導入する。Z-functional は即ち、境界上のスピンを固定した統計和であり、境界上のスピン間の coupling は、定義により半分の重みをもってエネルギーにふくまれる。ベレジンスキー⁴⁾ によって注意されたように、Z-functional は乗算の特性をもっている。即ち、となり合う2つの領域を1つに合同させる時、Z-functional を2乗して共通の境界上のスピンについて積分しなければならない。簡単のために正方形の領域を考える。そうすれば、長さ $2L$ の辺をもった正方形の functional Z_{2L} は、4つの Z_L -functional の積の平均に等しい。

$$Z_{2L} \{S_r\} = \int \prod (dS_{int}) \prod_{i=1}^4 Z_L \{S_{r_i}\} \quad (1)$$

$$(dS) \equiv d^n S \delta(1-S^2) \Gamma(n/2) \pi^{-n/2} \quad (2)$$

ここに、 $\{S_r\}$ は $2L$ の正方形の境界上のスピンの集合、 $\{S_{r_i}\}$ は L の正方形の境界上のスピンの集合、 $\{S_{int}\}$ は L の正方形の境界で $2L$ の正方形の内部にあるものの上のスピンである (1図を見よ)。

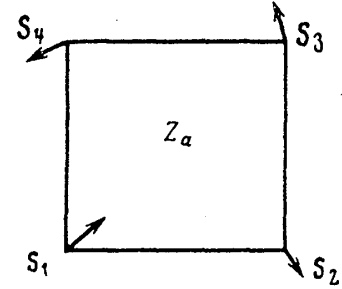


1図 2次元 Heisenberg model の correlation functional に対する正確な recursion equation 正方形の辺上のスピンの分布が、矢印で示してある。内部にあるスピンについては、平均をとる。

(1)は、functional recurrence equation であり、elementary cell における初期条件

$$Z_a = \exp \left(\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^4 S_i S_{i+1} + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^4 S_i \right) \quad (3)$$

の下に解くべきものである(2図)。類似の方程式を d 次元の場合にも書くことが出来る。(1)における因数はこの場合 2^d となる。明らかに我々は統計的極限 $L \rightarrow \infty$ における自由エネルギーに興味がある。自由エネルギーは、一般の形で normalized equation に関係づけることができる。これは次の様にして行われる。(1)の Z -functional から $\{S\}$ についての平均即ち普通の統計和を分離しよう。



2 図 elementary cell の correlation functional

$$Z_L \{S\} = \langle Z_L \rangle W_L \{S\} \quad (4)$$

そうすれば, correlation functional W に対して我々は

$$W_{2L} = \hat{R}(W_L) / \langle \hat{R}(W_L) \rangle, \quad (5)$$

の形の normalized equation を得る。そして, 統計和は, correlation functional を通じて recurrence relation により表現される。

$$\langle Z_{2L} \rangle = \langle Z_L \rangle^{2^d} \langle R(W_L) \rangle \quad (6)$$

この様にして我々は自由エネルギー, $-\beta F = \lim L^{-d} \ln \langle Z_L \rangle$ を得る。即ち,

$$-\beta F(\beta, h) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kd} \ln \langle \hat{R}(W_{2^{k-1}}) \rangle + \ln \langle Z_a \rangle. \quad (7)$$

recursion の approach では一般的な事であるが, 自由エネルギーの特異性は, correlation functional に対する方程式

$$W_L \rightarrow W_* \{S\} + (\beta - \beta_c) L^{1/\nu} \phi_1 \{S\} + h L^{d-d} \phi_2 \{S\} \quad (8)$$

の不安定な固定点に関係している。臨界指数 ν 及び d は W_* のまわりに線形化した方程式からきめられる。 ϕ_1 及び ϕ_2 はそれぞれ固有値 $2^{1/\nu}$, 2^{d-d} をもつその方程式の固

A. A. ミグダル (川畑有郷訳)

有状態である。そうすれば、自由エネルギーは、よく知られた scaling form

$$F(\beta, h) = (\beta - \beta_c)^{\nu d} f(h(\beta - \beta_c)^{(d-d_c)\nu}) + \text{regular term} \quad (9)$$

をもつ。singular term は、 $2^k \sim (\beta - \beta_c)^{-\nu}$ 又は $2^k \sim h^{-1/(d-d_c)}$ となる様な大きな距離によってきまる。

2. 低温近似

これまでの所では、我々の考察は正確なものであり、本質的には Kadanoff-Wilson の一般的な方式と異ならない。この方式は、functional equation に対するある適当な近似手段が十分とみとめられれば、現実的な意味をもつ。よく知られた Wilson の近似は、スピンのゆらぎが Gaussian に近い $d = 4 - \epsilon$ において正しい。

我々は、別の近似を提案する。この近似は、 $d = d_c + \epsilon$ の時正しく、このとき転移温度は小さい。

低温近似においては、正方形(さしあたり $d = 2$ とする)の辺にそってのスピンのゆらぎを無視する。そして、Z-functional を、相対する辺の平均のスピンの関数の積の形において求めてみよう。

$$Z_L = F_L(S_1, S'_1) F_L(S_2, S'_2) \quad (10)$$

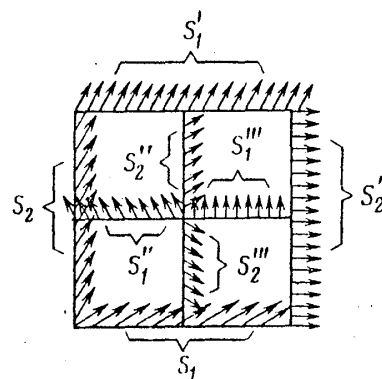
(1)における内部の平均された4つのスピンについて積分すると(3図)

$$F_{2L}(S, S') = (F_L^2)_{ss'}^2 \quad (11)$$

を得る。ここに、 F^2 は convolution

$$(F^2)_{ss'} = \int (dS'') F(S, S'') F(S'', S') \quad (12)$$

d 次元空間においては、我々は、 $2d$ の境界の各々の上の平均したスピンを考え、Z-functional を、相対する2つの辺上のスピンの関数 $F_L(S_i, S'_i)$ の d 個の積の形において求める。2倍の大きさの立方体を構成する 2^d の立方体の辺の、内部にあるもの上のスピン



3図 近似的 recursion equation 正方形の辺にそってのスピンのゆらぎは考えない。

について積分すると,

$$F_{2L}(S, S') = (F_L^2)_{ss'}^{2^{d-1}} \quad (13)$$

を得る。

最後に、ゲージ場の理論の時²⁾と同様に、方程式を、2倍でなく任意のスケール変換の場合に一般化するのが便利であろう。同じ様なやり方で、我々は、 λ^d ケの立方体を合同させる場合には、

$$F_{\lambda L}(S, S') = (F_L^\lambda)_{ss'}^{\lambda^{d-1}} \quad (14)$$

を得る。ここに、 F^λ は λ 重の convolution である。

λ が整数でない時には、この convolution は、球面調和関数による展開の助けにより定義出来る。磁場がない場合には、 F は、スカラー積 (SS') のみによっており、この展開は、

$$F_L = \sum_p f_p(L) \chi_p(SS') N_p \quad (15)$$

の形をとる。Fourier 成分 $f_p(L)$ に対しては、(14)から方程式

$$\chi_p(1) f_p(\lambda L) = \int (dS) \left[\sum_q f_q^\lambda(L) \chi_q(SS') N_q \right] \lambda^{d-1} \chi_p(SS'), \quad (16)$$

を得る。この方程式は、

$$\lambda \rightarrow \lambda^2, \quad L \rightarrow L^2, \quad d \rightarrow d/2 \quad (17)$$

というおきかえを行えば、ゲージ理論の方程式となる。(15), (16)に入っている球関数 $\chi_p(z)$ は $n=2, 4$ に対して、それぞれ $U(1)$, $SU(2)$ の群の character に一致する。このように、 $X-Y$ model は photodynamics, 即ち Abelian 格子ゲージ理論と類似であり、4成分 Heisenberg model は、Yang-Mills の格子理論と類似である。

これらの類似は、偶然ではない。ポリヤコフは、場の理論の方法で、4次元の photodynamics では、2次元の $X-Y$ model と同様に order なしに相転移が起ることを示した。又、2次元の Heisenberg model は $0^\circ K$ で特異性をもつが、これは、たとえば Yang-Mills 理論における asymptotic freedom に関係している。

我々の近似の枠内では、類似性はもっと先まであり、臨界指数の間の関係をあたえる。

A. A. ミグダル (川畑有郷訳)

たとえば,

$$\Delta_{\text{gauge}}(2d)/\Delta_{\text{spin}}(d) = \nu_{\text{spin}}(d)/\nu_{\text{gauge}}(2d) = 2. \quad (18)$$

3. Ising Model

まず, Ising model から始める。この場合には, 方程式(14)は, 最後まで解析的に調べる事が出来る。

normalized correlation functional

$$w_L = 1 + SS' \operatorname{th} \beta(L) = e^{\beta(I)ss'} / \operatorname{ch} \beta(L) \quad (19)$$

の係数に対しては, 方程式は次の形に帰する。

$$\operatorname{th} [\beta(\lambda L) \lambda^{1-d}] = \operatorname{th}^\lambda \beta(L), \quad \beta(a) = \beta. \quad (20)$$

方程式を固定点 β_c のまわりに線形化して, 我々は(8)の指数 $\Delta' = d - \nu^{-1}$ を得る。

$$\Delta' = (\ln \lambda)^{-1} \ln \left[\frac{\operatorname{sh} 2\beta_c}{\operatorname{sh} 2\beta_c \lambda^{1-d}} \right] \quad (21)$$

第二の指数 Δ は, 解を

$$w_L = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_c} \exp(\beta_c SS' \operatorname{th} L^{d-\Delta} (S + S')) \quad (22)$$

の形におき, (14)を h について線形化すれば得られる。このとき, 我々は

$$\Delta = 1 + 2\beta_c (\lambda^{1-d} - 1) / \ln \lambda \quad (23)$$

を得る。臨界温度及び, 臨界指数が model parameter λ に依っていることは, 我々の近似が正確でない事を示している。

λ を λ^{-1} に変えて, 同時に転移温度を λ^{d-1} 倍すれば指数は変わらないのは興味ある事である。この様な観点からすれば, $\lambda = 1$ と選ぶのが最適である ($\lambda = 1$ における見かけの特異性は, あらゆるオーダーで消えている)。2次元モデルに対する, $\lambda = 1$ におけるパラメーターの数値的な値を表に示した。

表 1

	$\lambda = 1$	Решение Онсагера
$2\beta_c$	$\ln(1 + \sqrt{2}) = 0,881$	$\ln(1 + \sqrt{2})$
Δ'	$\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) = 1,246$	1
Δ	$1 - \ln(1 + \sqrt{2}) = 0,119$	1/8

臨界温度は、正しいものと一致する。order parameter のべき Δ は 5%，エネルギー密度のべき Δ' は 25% ちがっている。いうまでもなく、2次元 Ising Model に対しては、このような粗い近似は意味をもたない。又、同じく recursion approach に基いており、より小さな誤差を与える Kadanoff の方法がある。しかし残念ながら、この方法では群の discreteness を本質的に利用しており、一般化が出来ない。

我々の方程式は、転移温度が 0 に近づく $d = 1 + \epsilon$ では正確になるはずである。このときには

$$2\beta_c = \frac{\ln \lambda}{1 - \lambda^{-\epsilon}} + \frac{1 - \lambda^2}{3(1 - \lambda^{-\epsilon})} e^{-4\beta_c} + O(e^{-6\beta_c}) \quad (24)$$

$$\Delta' = 1 + \frac{2}{3} \frac{\lambda^2 - 1}{\ln \lambda} e^{-4\beta_c} + O(e^{-6\beta_c}) \quad (25)$$

$$\Delta = \frac{1}{3} \frac{\lambda^2 - 1}{\ln \lambda} e^{-4\beta_c} + O(e^{-6\beta_c}) \quad (26)$$

を得る。 ϵ 展開の第一項 $2\beta_c = \epsilon^{-1}$, $\Delta' = 1$, $\Delta = 0$ は λ に依存しない。したがって、これらは正確であると期待出来る。この証明を得ることは出来なかった。 ϵ 展開の第一項が、2次元 Ising Model に対してあまり悪くない近似を与えることは興味ある事である。

類似のゲージ場モデルにふれれば、次の様な事が知られている⁵⁾

$d = 2$ の時は、1次元の Ising Model に帰し、我々の方程式によって正確に記述される。 $d = 3$ では、自由エネルギーは $\beta_c = 0.76$ $\nu = 0.62$ をもつ 3次元 Ising Model に帰する。最後に、 $d = 4$ のときは、転移温度は $2\beta_c = \ln(1 + \sqrt{2})$ であることが

A. A. ミグダル (川畑有郷訳)

わかっている。我々の方程式は (20) で $\lambda = 1$ として (17) のおきかえを行う) $d = 3$ では $\beta_c = 0.9$, $\nu = 1.05$, $d = 4$ では $2\beta_c = \ln(1 + \sqrt{2})$, $\nu = 0.66$ を与える。

まとめとして, discrete な群は, 我々の方程式によって, 他の recursion の方法にくらべて満足すべき精度で記述されると言えよう。我々の方程式の憂れた点は, 連続群の場合に現れるのであり, 他の方法は応用できない。

4. 対称性の連続群

連続的な対称性をもつ系においては, critical dimension は $d_c = 2$ である。方程式 (19) の解を, $d = 2 + \epsilon$ の時に Gauss 型

$$F_L(\cos \theta) \rightarrow \exp(A(L) - \beta(L)\theta^2/2) \quad (27)$$

の形において求めてみよう。ここに $\beta^{-1}(L)$ は小さな effective temperature である。

鞍点法で積分を行い, $\sim \beta$ 及び ~ 1 の項をのこすと, $\beta(L)$ の関係式

$$\beta(\lambda L) = \lambda^\epsilon \beta(L) + (1/6)(n-2)\lambda^\epsilon(1-\lambda) + O(\beta^{-1}) \quad (28)$$

を得る。これから, 転移点が求まり

$$\beta_c = \frac{n-2}{6} \frac{1-\lambda}{\lambda^{-\epsilon}-1} \rightarrow \frac{n-2}{6\epsilon} \frac{\lambda-1}{\ln \lambda} + O(1), \quad (29)$$

又指数 ν は

$$\nu = \epsilon^{-1} + O(1) \quad (30)$$

となる。第 2 の臨界指数 Δ は非等方的解

$$F_L \rightarrow \exp(A - \beta_c \theta^2/2 + h L^{d-d} (S + S') (1 + \alpha \theta^2)) \quad (31)$$

に対応する。

方程式 (11) を磁場 h について線形化し, 鞍点法で積分すれば,

$$\alpha = 1/12 \quad (32)$$

$$2^{-d} = 1 - (n-1)/12\beta_c + O(\beta_c^{-2}) \quad (33)$$

を得る。 $\lambda = 2$ のとき(29)の β_c を代入すれば、 ϵ 展開の第一項

$$\Delta = \frac{n-1}{n-2} \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2) \quad (34)$$

を得る。この指数に対する ϵ 展開の正確な線形項はポリヤコフにより場の chiral 理論により求められた。我々の結果(30), (34)は正確なものに一致する。これは驚くべき事ではない。というのは、転移温度は ϵ に比例して 0 になるのであり、我々のモデルは低温の極限で正確だからである。(29)で、 $\epsilon \beta_c$ の比例係数は、 λ に依っており、正確な値

$$\epsilon \beta_c \text{ exact} \rightarrow (n-2)/2\pi \quad (35)$$

とは異なる。 $\lambda = 1$ では差はせいぜい 5 % である。

それでは、2次元ではどうなるのであろうか。 $\epsilon \rightarrow 0$ における特異性の温度のべきは、exponential になる。たとえば、

$$r_c \sim \left(1 - \frac{\beta}{\beta_c}\right)^{-\nu} \rightarrow \exp\left(\frac{\beta\nu}{\beta_c}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{2\pi\beta}{n-2}\right) \quad (36)$$

空間のスケール L への依存性べきは対数的となる。

$$\beta(L) \rightarrow \beta - \frac{n-2}{2\pi} \ln \frac{L}{a} \quad (37)$$

$$h L^{d-\Delta} \rightarrow h L^2 \left[\frac{\beta(L)}{\beta} \right]^{(n-1)/2(n-2)} \quad (38)$$

これを確認するのは難しくはない。 $\epsilon = 0$ における Gaussian 近似の recursion equation を考えればよい。2次元の Heisenberg model で転移温度が 0 であるということは、の定理に対応して全温度領域で order が無い事を意味する。

X-Y model は特別の場合であり、これに対応する群は Abelian である。 $\epsilon = 0$, $n = 2$ の時、(34), (35)で転移温度及び指数 Δ は不定となる。correlation length (36)は、Gaussian 近似(27)が使える十分低い温度では無限大となる。Gaussian 近似への補正は expo-

nential に小さい。というのは、それは、スピンの2次元ベクトルの角度についての積分領域 $|\varphi| < \pi$ の端に関係しているからである。もし、積分を $|\varphi| < \infty$ に広げると、任意の β をもつ Gaussian form は固定点となる。方程式(11)を、 $n=2$ の場合に、縮退した Gaussian 解

$$F_L = \exp \left(A - \frac{\beta}{2} \theta^2 + \frac{h(S+S')}{|S+S'|} L^{2-d} \psi(\theta) \right) \quad (39)$$

のまわりに線形化すれば、我々は積分方程式

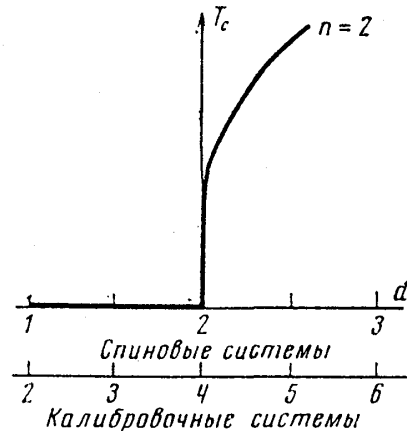
$$2^{-d} \psi(\theta) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \exp \left(-\beta \left(\varphi - \frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \cos \frac{\varphi - \theta}{2} \psi(\varphi) \quad (40)$$

を得る。この解は θ^2 と $T \equiv \beta^{-1}$ の2重級数の形で求めることができる。

$$\psi = 1 - \frac{\theta^2}{24} \left(1 + \frac{7T}{90} - \frac{\theta^2}{80} + \dots \right) \quad (41)$$

$$d \ln 2 = \frac{T}{12} - \frac{1}{6} \left(\frac{T}{12} \right)^2 + \dots \quad (42)$$

方程式(11)を $n=2$ (磁場なし) の場合に数値的に解くと、出発値 (関数) を $F_0 = \exp(\beta \cos \varphi)$ とすると、数回の iteration で Gaussian form $\exp(A - \bar{\beta} \varphi^2 / 2)$ ($\bar{\beta} = \beta + O(1)$) に移行する。 $\beta \gtrsim 1$ のときは、Gaussian form は極めて長くつづく、そして、急速に $F=1$ となるが、これは、order のない相に対応している。 $\beta > \beta_c \approx 1.7$ においては、行われた iteration の範囲では (100 回) Gaussian form のままであった。これは、実質的には、 $\beta > \beta_c$ では correlation length は無限大であること、即ち $\beta > \beta_c$ の領域は「転移線」であることを示している。これは、4図の $T_c(\epsilon)$ の曲線に対応している。この曲線は、方程式(16)を λ



4 図 recursion equation から求められた転移温度と空間の次元の定性的な関係、スピン系 $SO(2)$ (XY model 及びゲージ場系 $U(1)$ (photodynamics) に対するもの

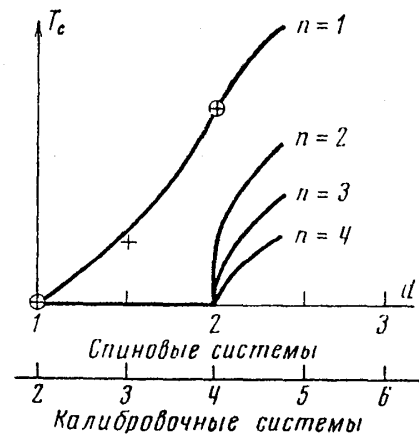
$= 2^{1/(d-1)}$ として数値的に解いて得られたものであるが、その場合には方程式の Fourier 標示は簡単になる。

ゲージ場系とスピン系の analogy に対応して、上にのべたことはすべて 4 次元の photodynamics にも適用することを注意しよう。これらの結果は、ベレジンスキー⁴⁾ の X-Y model についての一般的結論とも、又ポリヤコフの photodynamics についてのものとも一致する。

Conclusion

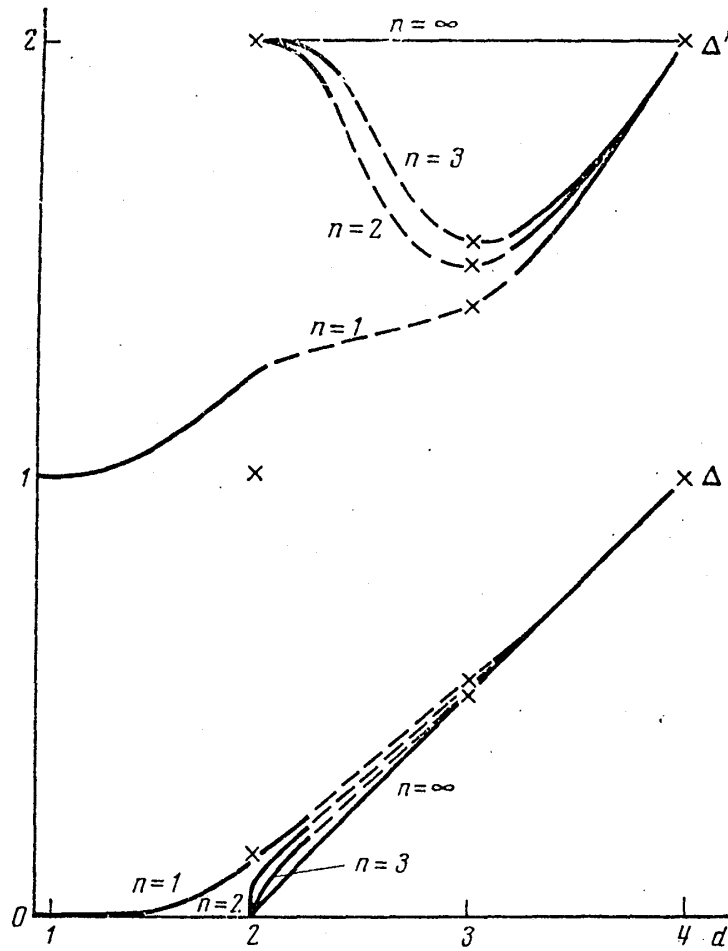
この論文の結果は 5, 6 図にまとめられている。5 図によって、相転移が臨界次元数でどのようになくなるかを見て理解できる。6 図は、この際次元* (指数) のスペクトルに何が起るかを示す。 $d = 4 - \epsilon$ のスペクトルのふるまいは、Wilson³⁾ の仕事から知られる。上にある曲線は、エネルギー密度の Operator の次元 $d' = d - \nu^{-1}$ である。この図には、それを構成する operator 一つ一つの次元は示していない。これらの次元は、 $d = 2 + \epsilon$ の場合にも、線形化した recursion equation により求められる。モデルの実的な応用について言えば、一番興味があるのは、おそらく、2 次元の磁性体の状態方程式であろう。これは、recursion equation の数値解によって求められる。この際、スピン空間の異方性を考えに入れることが出来るが、それによって、スピンの成分の一つ又は二つのゆらぎが抑えられるはずである。

最後に、協力者である A. M. ポリヤコフ, V. L. ポクロフスキー, C. B. ハフラチェフの多くの discussion と critical な remark に感謝する。又、数値計算を助けてくれた E. B. ボゴモリニイ及び V. V. バシキンに感謝する。



5 図 $SO(n)$ の対称性をもつゲージ場及びスピン系についての空間次元と転移温度の定性的な関係. recursion equation から求めたもの、十字印は、discrete なゲージ群 $SO(1) = Z_2$ に対する ref 5) の正確な結果、円は、Ising model に対する正確な結果である。

訳者注* 空間の次元と混同せぬ事。



6 図 一般化された Heisenberg model $SO(n)$ に対する, スピンの次元 (Δ) とエネルギー密度の次元 (Δ') の空間次元への定性的な依存性。 $d \rightarrow 1$ 及び $d \rightarrow 2$ におけるふるまいは recursion equation, $d \rightarrow 4$ の場合は ϵ 展開からもとめたもの。
 ×印は, 2次元及び3次元の知られている指数を示す。