

フォン・ノイマンによる効用の可測性の議論と 公理的熱力学におけるエントロピー概念の関連

日本大学 理工学部・量子科学研究所 島田一平¹

ふたつの異なる分野において、ふたつの異なる量がほとんど同一の公理系に基いて導入されている。一つは数理経済学における”効用の数値的尺度”であり [1]、他の一つは熱力学における”エントロピー”である [2]。このことから、複数の主体間の競合という点を別にすれば、経済的均衡が熱平衡と形式的に同一の概念である事が結論でき、均衡点（熱平衡）の安定性の考察を経て、経済動学と非平衡動力学との関係へと、アナロジーをたどる足掛かりが与えられる。²

以下に、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルによる数値的効用関数 $u(\cdot)$ と Leib らによるエントロピー関数 $S(\cdot)$ の存在と一意性の定理を述べる。

ノイマンの公理

$(U, \leq)$ は全順序集合。³

$(U, +)$ は線形空間. $\alpha x + \beta y$ は効用 x と y の確率的混合.

両立性

$$x < y, 0 < \alpha < 1 \Rightarrow x < \alpha x + (1 - \alpha)y.$$

連続性

$$x < y < z \Rightarrow \exists \alpha \ 0 < \alpha < 1, \ \alpha x + (1 - \alpha)z < y.$$

定理

U 上の単調な線形汎関数 u が存在する.

U 上の単調な線形汎関数を v とすると,

$$v(x) = \omega_0 u(x) + \omega_1, \ \omega_0 > 0.$$

¹E-mail: ippei@phys.cst.nihon-u.ac.jp

²本研究会における山野拓也氏の講演で、経済学におけるさまざまな不平等尺度の定義が、統計物理学における Reny エントロピーを含む様々な確率のエントロピー概念の導入に先んじていた（それらは数学的に同一である）との指摘 [3] は驚きであった。

³ノイマンは $\leq$ でなく $<$ について公理化しているが、ここでは同じ内容をこのように述べる。

Lieb の公理

$(X, \leq)$ は全順序集合. $\leq$ は 断熱的に到達可能 (adiabatically accessible) な関係.

$(X, +)$ は線形空間 (の凸 集合). $+$ は状態の重ね合わせ (composition) を表す.

両立性

$$x \leq x', y \leq y' \Rightarrow x + y \leq x' + y'.$$

$$x \leq y, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y.$$

連続性

$$\exists z_0, z_1, x + \varepsilon z_0 \leq y + \varepsilon z_1 \Rightarrow x \leq y.$$

定理

X 上の単調な線形汎関数 S が存在する.

X 上の単調な線形汎関数を S' とすると,

$$S'(x) = A S(x) + B, A > 0.$$

これから明かなように、単調な線形汎関数としての数値的効用とエントロピーの存在と一意性を述べるふたつの定理の主張は全く同じである。そのための前提条件として、効用ないしは熱平衡状態間の順序関係と線形演算の満たすべき性質（公理）もほぼ類似している。ノイマンの公理と Lieb の公理の同等性を証明することはおそらく可能であろう。

このような静的な議論の背景として、仮想的変位に対する時間変化を考え、そのドライビングフォースとして限界効用とエントロピー勾配をもってする動力学が考えられる。限界効用逓減の法則とルシャトリエの原理の対応もここから得られる。ノイマンの効用に対する動力学はゲーム論的ダイナミックスがそれに近いものといえ、熱力学に対してはオンサーガーのゆらぎの動力学がそれにあたる。

参考文献

- [1] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton, 1944).
フォン・ノイマン, モルゲンシュテルン, 『ゲームの理論と経済行動』 (東京図書 1973).
- [2] E. H. Lieb, J. Yngvason, *Physics Reports* **310** (1999), 1.
- [3] 山野拓也, ” 不平等尺度の情報理論的アプローチとその土地市場への応用 ” , 本研究会での報告.