

On knotted tori in S^4

上智大 理工 横山和夫

§ 1 序

torus knot (link) を 4 次元へ拡張し, ほとんど同じ結果が成立することを示す。

3 次元球面 S^3 のお互いに相交わらない単一閉曲線 $l = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_s$ を component s の link (in S^3) と呼ぶ。特に component が 1 の時 knot と呼ぶ。2 つの link l_1, l_2 に対して同値類を次の様に定義する。

[定義] l_1 と l_2 が同値であるとは

$$\exists h: S^3 \longrightarrow S^3 \text{ ; homeomorphism}$$

$$h(l_1) = l_2$$

この同値関係により link は link type に分類される。

[定義] knot k が unknot であるとは

$$\exists D^2 \subset S^3 \text{ ; 2-disk}$$

$$\partial D = k$$

特別な link として次の様な link が考えられている。

[定義] link l が torus link であるとは

$$\exists k; \text{unknot (loop)}$$

$$l \subset \partial N(k; S^3)$$

ここに $N(\ ; \)$ は regular neighborhood

これを4次元へ拡張するために次の様に考える。

4次元球面 S^4 のお互いに相交わらない genus 1 の単一閉曲面 $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$ を component s の linked tori (in S^4) と呼ぶ。特に component が1の時 knotted torus と呼ぶ。link と同様に

[定義] 2つの linked tori L_1, L_2 が同値であるとは

$$\exists h: S^4 \longrightarrow S^4; \text{homeomorphism}$$

$$h(L_1) = L_2$$

[定義] knotted torus K が unknot であるとは

$$\exists D^2 \times S^1 \subset S^4$$

$$\partial(D^2 \times S^1) = K$$

そして torus link の拡張として

[定義] linked tori L が $\mathbb{I}$ -linked tori であるとは

$$\exists K; \text{unknotted torus}$$

$$L \subset \partial N(K; S^4)$$

このように定義すると torus link とほとんど同じ結果が

成立する。それを今後考えていこう。

§ 2. Component の数について.

torus link l については $\partial N(k; S^3) = \mathbb{T}^2$ とおくと $\mathbb{T}^2 \approx S^1 \times S^1$ (homeomorphic) だから $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ここで生成元を a, b とする。すると $l = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_s$ の表わす homology class of $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ を $pa + qb$ とすると、よく知られた結果として、

Proposition もし任意の i について $k_i \neq 0$ on $\mathbb{T}^2$ ならば p と q の最大公約数は l の component の数 s に等しい。

$\mathbb{T}$ -linked tori L についても同様なことが成立する。すなわち、 $\partial N(K; S^4) = \mathbb{T}^3$ とおくと $\mathbb{T}^3 \approx S^1 \times S^1 \times S^1$ だから $H_2(\mathbb{T}^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ここで生成元を a, b, c とする。すると $L = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_s$ の表わす homology class of $H_2(\mathbb{T}^3; \mathbb{Z})$ を $pa + qb + rc$ とすると、

Theorem もし任意の i について $k_i \neq 0$ in $\mathbb{T}^3$ ならば p, q, r の最大公約数は L の component の数 s に等しい。

もっと一般に境界のない (又は連結境界をもつ) PL compact connected n -manifold M^n に対しても, Poincaré

duality によって $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ であるので, その生成元を $a_1, a_2, \dots, a_s$ とすると

Theorem trivial でない homology class

$$\theta = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_s a_s$$

に対して, 次の2つの条件は同値である.

(i) θ が β 個の connected component をもつ closed submanifold によって実現できる.

(ii) $p_1, p_2, \dots, p_s$ の最大公約数を α とすると $\beta \geq \alpha$.
 ・証明及び詳しいことは [5] 参照.

§3. homology class と link type について.

homology class of $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ と link type についてはよく知られた結果として

Proposition 2つの torus link $l = k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_s$ と $l' = k'_1 \cup k'_2 \cup \dots \cup k'_t$ に対して, もし任意の i, j について $k_i \neq 0$ $k'_j \neq 0$ on $\mathbb{T}^2$ ならば, l の表わす homology class を θ , l' の表わす homology class を θ' とすると

$$\theta = \theta' \Rightarrow l \text{ と } l' \text{ は同じ type}$$

同様なことは $\mathbb{T}^2$ -linked tori についても成立する。す

なゆら,

Theorem 2つの $\mathbb{T}$ -linked tori $L_1 = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s$ と $L_2 = K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_t$ に対して, もし任意の i, j について $K_i \cap 0, K'_j \cap 0$ in $\mathbb{T}^3$ ならば, L_1 の表わす homology class of $H_2(\mathbb{T}^3; \mathbb{Z})$ を θ_1 , L_2 の表わす homology class を θ_2 とすると

$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow L_1 \text{ と } L_2 \text{ は 同じ type}$$

・証明及び詳細は [2] 又は [4] 参照.

並については torus link に対しては.

Proposition torus link l の表わす homology class of $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ を $pa + gb$ とすると

$$\pi_1(S^3 - l) = \{x, y; x^p = y^q\}$$

として Alexander matrix, Alexander polynomial を考えることにより, 次の様に torus link は完全に分類されている。

Proposition 2つの link l, l' に対して, l と l' が同じ type である必要+充分条件は l, l' の表わす homology class of $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ をそれぞれ $pa + gb, p'a + g'b$ とすると $p = |p'|, q = |q'|$ 又は $p = |q'|, q = |p'|$ が成り立つことである。但し l, l' の component k_i, k'_j に

homologous 0 on $\mathbb{P}^2$ なるものは存在しないとする。

ところが $\mathbb{P}$ -linked tori については $N(K; S^4) \approx D^2 \times S^1 \times S^1$ とあるが, ∂D^2 と homology intersection number in $\mathbb{P}^3$ が 1 である生成元を特に c としておくと

Theorem $\mathbb{P}$ -linked tori L の表わす homology class of $H_2(\mathbb{P}^3; \mathbb{Z})$ を $pa + qb + rc$, p と q の最大公約数を α とすると

$$\pi_1(S^4 - L) = \{x, y; x^\alpha = y^r\}$$

証明は van Kampen の定理を 2 回うまく使うことによつて得られる。

したがって torus link と同じ方法によつては分類が完全にはできない。他の方法によつて分類できるかもしれない。それは今後の課題である。

[参考文献]

- [1] R. H. Crowell and R. H. Fox; INTRODUCTION TO KNOT THEORY. Ginn and Company (1963)
- [2] W. Jaco; Surfaces embedded in $M^2 \times S^1$. Can. J. Math., vol 22 (1970)
- [3] K. Reidemeister; KNOTENTHEORIE. Chelsea

(1948) New York

[4] K. Yokoyama ; Surfaces embedded in a 3-manifold.

Master thesis (Kobe Univ.)

[5] K. Yokoyama ; $\tilde{L}$ -equivalence and representations
of homology classes. Yokohama Math. J. (to appear)