

Lovelace の方法について

大阪大学基礎工学部 浜 満

§ 1 要 約

§ 2 Lovelace 方程式

§ 3 不安定粒子のとりあつかい

§ 4 bound state と resonance による二体系の近似

§ 5 おわりに

非相対論的な三体の散乱問題をとりあつかった Lovelace の方法を簡単に紹介するのが目的である。

文献

1. C. Lovelace, Practical Theory of Three Particle States I; Nonrelativistic, Phys. Rev. 135 B1225 (1964)
2. C. Lovelace, Three Particle Systems and Unstable Particles, in "Strong Interactions and High Energy Physics", edited by R. G. Moorhouse (Oliver and Boyd, London, 1964)

§ 1. 要 約

Faddeev の方法を使って実用的な三体の散乱理論を作る。実際の散乱過程で重要な初期状態, 終状態に bound state 或いは resonance state を含む S -行列に対応する operator を別に導入しそれらを含む方程式を作る。この Lovelace 方程式の iteration kernel はもとの Faddeev 方程式のそれと同じである。次に kernel 中の二体の散乱振幅を bound と resonance で近似する。その結果

i) bound state, resonance 散乱に対する方程式と

ii) 終状態が三体になる反応を i) の解を使って表わす式

が得られる。i) では, bound state, resonance 間のポテンシャルは物理的に予期される通り, nonlocal で energy dependent, 三体の threshold より上では

complex になる。このポテンシャルは二体の波動函数より得られ任意定数は入らない。さらに解は三体の unitarity を満す。

§ 2. Lovelace 方程式

三つの粒子の質量, 運動量をそれぞれ, m_1, m_2, m_3 k_1, k_2, k_3 とし新に P, p_α, q_α ($\alpha=1, 2, 3$) を次のように定める。

$$P = (k_1 + k_2 + k_3) \times [2(m_1 + m_2 + m_3)]^{-1/2}$$

$$p_1 = (m_3 k_2 - m_2 k_3) \cdot [2m_2 m_3 (m_2 + m_3)]^{-1/2}$$

$$q_{11} = [m_1 (k_2 + k_3) - (m_2 + m_3) k_1] [2m_1 (m_2 + m_3) (m_1 + m_2 + m_3)]^{-1/2}$$

$\alpha=2, 3$ に対しても cyclic に subscript を入れかえて定める。全運動エネルギーは

$$H_0 = P^2 + p_\alpha^2 + q_\alpha^2 \quad (P=0 \text{ としてよい})$$

二体間に独くポテンシャルを V_α ($\alpha=0, 1, 2, 3$) とし, V_1 は粒子 2 と粒子 3 に働くポテンシャル, V_2 は 1 と 3, V_3 は 1 と 2 間のポテンシャルとする。 $V_0 \equiv 0$. 三体ポテンシャルを含めることは容易だが本質的差はないので考えないことにする。ここではポテンシャルとして, 有限の range の一般化された Yukawa ポテンシャルをとる。そのためもとの Faddeev の場合より容易に二体系の散乱 operator 及び次に述べる三体の Lovelace 方程式の kernel の compactness を明できる。

$\alpha=0$ に対しては三粒子共 free, $\alpha=1, 2, 3$ に対しては粒子 α が free で他の二つが bound state にある状態に対応させる。それらは $H_\alpha = H_0 + V_\alpha$ の homogeneous equation の解であることを考慮すると, α から β への散乱 operator $U_{\alpha, \beta}$ について, 次の modified Faddeev 方程式 (Lovelace 方程式) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha, \beta}^+(s) &= \sum_{r \neq \alpha} V_r - \sum_{\delta \neq \beta} U_{\alpha \delta}^+(s) G_0(s) T_\delta(s) \\ U_{\alpha, \beta}^-(s) &= \sum_{\delta \neq \beta} V_\delta - \sum_{r \neq \alpha} T_r(s) G_0(s) U_{r \beta}^-(s) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに s は全エネルギー, $G_0 = [H_0 - s I]^{-1}$ $T_\delta(s)$ は粒子 δ が素通りし, 残る二つの粒子が散乱する過程の散乱振巾である。例えば粒子 1 と 2 の二体の散乱振巾 $\hat{T}_3(s)$ と $T_3(s)$ との関係は

$$\langle p_3, q_3 | k_3(s) | p'_3, q'_3 \rangle = \delta(q_3 - q'_3) \langle P_3 | \hat{T}(s - q_3^2) | p'_3 \rangle.$$

$U_{\alpha, \beta}^+$ と $U_{\alpha, \beta}^-$ は energy shell 上では一致するが off shell では異なり, unitarity を考えるときに必要である。Faddeev 方程式における $M_{\alpha, \beta}, W_{\alpha, \beta}$ との関係は

$$U_{0,0}^{\pm} = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha, \beta}$$

$$U_{\alpha,0}^{\pm} = \sum_{\gamma} \sum_{\beta} M_{\gamma, \beta}$$

$$\sum_{\beta} W_{\alpha\beta} = -T_{\alpha} G_0 U_{\alpha 0}^+$$

S-行列を $U_{\alpha, \beta}^{\pm}$ で表わすと,

(a) bound state 散乱 (free な粒子 α が残る二つの粒子の bound state と散乱して, 粒子 β が free で他の二つが bound state を作る場合) には,

$$\begin{aligned} S_{\alpha n, \beta m}(q_{\alpha}, q'_{\beta}) &= \delta_{\alpha', \beta} \delta_{nm} \delta_3(q_{\alpha} - q'_{\alpha}) \\ &- 2\pi i \delta(q_{\alpha}^2 - E_{\alpha n} - q'_{\beta}{}^2 + E_{\beta m}) \int d p_{\alpha} \int d p'_{\beta} \\ &\times \psi_{\alpha n}^*(p_{\alpha}) U_{\alpha\beta}^{\pm}(p_{\alpha}, q_{\alpha}, p'_{\beta}, q'_{\beta}; q_{\alpha}^2 - E_{\alpha n} + i\epsilon) \psi_{\beta m}(p'_{\beta}) \end{aligned}$$

ここに $\psi_{\alpha n}(p_{\alpha}), \psi_{\beta m}(p_{\beta})$ は bound state の波動関数, $E_{\alpha n}, E_{\beta m}$ はそれらの binding energy である。

(b) disintegration (粒子 α と他の二つ粒子の bound state が散乱して free な三粒子になる過程) に対しては,

$$\begin{aligned} S_{\alpha n, 0}(q_{\alpha}, p', q') &= -2\pi i \delta(q_{\alpha}^2 - E_{\alpha n} - p'^2 - q'^2) \times \\ &\times \int d p_{\alpha} \psi_{\alpha n}^*(p_{\alpha}) U_{\alpha, 0}^{\pm}(p_{\alpha}, q_{\alpha}, p', q'; q_{\alpha}^2 - E_{\alpha n} + i\epsilon) \end{aligned}$$

§3 不安定粒子のとりあつかい

ハミルトニアン H の完全系を考える場合, bound state と連立スペクトルですでに完全であり, resonance state は連続スペクトルに含まれるものであるから, bound state とは本質的に異なる。しかし連続スペクトルのうちの重要な寄与として resonance state を別にとり出すことは, 実際問題として重要である。特に中間状態で三体のうち二体

が resonance state になる場合，終状態三体のうち二体が resonance state を通してこわれる場合。ここでは phase ϕ だけずらせた complex potential V^ϕ , V_α^ϕ , complex ハミルトニアン H^ϕ , H_α^ϕ を導入し，その固有状態に resonance を対応させて，bound state とよく似た形でとりあつかう。complex ハミルトニアンに対応する散乱振巾 $U_{\alpha,\beta}^\phi$ はもとの振巾を right hand cut から unphysical sheet へ解析接続したものであることを証明できる。主な相異は右と左の固有函数はエルミート共役でなくそれぞれ生成崩壊に対応することと，二体が resonance，他の二つが free の状態に対応して unphysical sheet に cut が出ることである。bound state と一粒子 free に対応するものは，実軸上の cut. $U_{\alpha,\beta}^\phi$ に対しても形式的に (1) と同じ方程式が得られるので上に述べた相異点を別に考えると，bound state と resonance を同じようにとりあつかえる。

§ 4 bound state と resonance による二体系の近似

(1) 式の kernel の二体系の散乱振巾を bound state と resonance で近似する。kernel が compact であることは，この近似が良いことを意味する。二体系の散乱振巾は pole と resonance の近くで separable ポテンシャルから得られるものと同じ形にかけるから，二体系に対して separable ポテンシャルの sum で近似する。以下では一つの部分波をとり出して考えることにする。

$$\begin{aligned}
 \langle p | V_\alpha | p' \rangle &\approx \sum_n \lambda_{\alpha n} g_{\alpha n}(p) g_{\alpha n}(p') \\
 \langle q_\alpha p_\alpha | T_\alpha(s) | q'_\alpha p'_\alpha \rangle \\
 &\approx \sum_n g_{\alpha n}(p_\alpha) \langle q_\alpha | \tau_{\alpha n}(s) | q'_\alpha \rangle g_{\alpha n}(p'_\alpha) \\
 \langle q_\alpha | \tau_{\alpha n}(s) | q'_\alpha \rangle &= t_{\alpha n}(s - q_\alpha^2) \delta(q_\alpha - q'_\alpha) .
 \end{aligned} \tag{2}$$

ここに $g_{\alpha n}(p)$ は coupling form factor で

$$g_{\alpha n}(p) \equiv V_\alpha \psi_{\alpha n}(p) = (-H_0 - E_{\alpha n}) \psi_{\alpha n}(p)$$

$t_{\alpha n}(k^2)$ は二体の propagator

$$t_{\alpha n}(k^2) = \left[\frac{1}{\lambda_{\alpha n}} + 4\pi \int_0^\infty dq^2 q \frac{|g(q)|^2}{q^2 - k^2 - i\epsilon} \right]^{-1} \tag{3}$$

bound state 又は resonance の寄与だけとり出すと、それぞれ

$$t_{an}(k^2) \approx \frac{1}{-E_{an} - k^2}$$

$$t_{an}(k^2) \approx \frac{1}{k_r^2 - k^2 + 2\pi i [g(k)]^2} \quad (k_r^2; \text{resonance energy})$$

bound state (resonance) 散乱に対しては、(2), (3) を (1) に代入し、初期、終状態の波動関数をかけて内部運動量で積分すると、

$$\begin{aligned} X_{an, \beta m}(s) = & -Z_{an, \beta m}(s) \\ & - \sum X_{an, r l}(s) \tau_{r l}(s) Z_{r l, \beta m}(s) \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる。ここに

$$\begin{aligned} \langle q_\alpha | X_{an, \beta m}(s) | q'_\beta \rangle = & \\ = \int d p_\alpha d p'_\beta U_{\alpha, \beta}^+(p_\alpha, q_\alpha, p'_\beta, q'_\beta; s + i\epsilon) \psi_{\beta m}(p'_\beta) \\ - \langle q_\alpha | Z_{an, \beta m} | q'_\beta \rangle [\lambda_{\beta m} t_{\beta m}(s - q'^2_\beta)]^{-1} \end{aligned}$$

第二項は energy shell 上 ($s = -E_{\beta m} + q'^2_\beta$) では 0 ($t(s - q'^2_\beta)$ は pole) だから $X_{an, \beta m}$ は散乱振巾である。(4) は many channel の Lippmann-Schwinger 方程式で

$$\begin{aligned} \langle q_\alpha | Z_{an, \beta m} | q_\beta \rangle \\ \equiv (1 - \delta_{\alpha\beta}) \frac{g_{an}(p_\alpha) g_{\beta m}(p_\beta)}{p_\beta^2 + q_\beta^2 - s - i\epsilon} \left[\frac{m r (m_\alpha + m_\beta + m_r)}{(m_\alpha + m_r)(m_\beta + m_r)} \right]^{-3/2} \end{aligned}$$

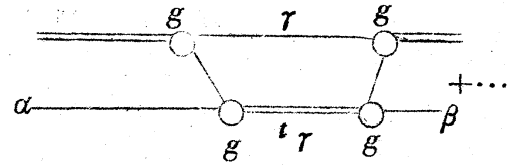
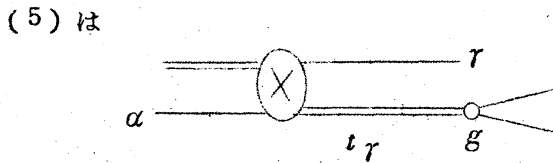
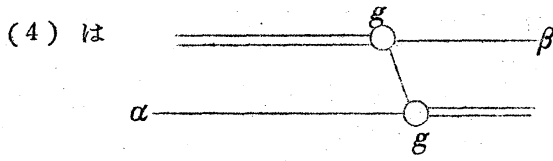
は bound state (resonance) 間のポテンシャルに相当する。これは nonlocal, energy dependent で二体の散乱の知識だけから得られる。

(4) の解を使つて、bound state-disintegration の遷移振巾は、 $V_{\beta=0}=0$ を考えて、(1) より

$$\sum_{r l} \langle q_\alpha | X_{an, r l} | q'_{r l} \rangle t_{r l}(s - q'^2_r) g(p'_r) \quad (5)$$

と表わせる。これは三粒子のうち二つは bound state (resonance) を通つて壊れる

ことを示す。図で表わすと、



§ 5 おわりに

(4), (5) は isobar モデルの正当性を理論的に示したことになる。他の利点としては

i) final state interaction が overlapp している場合を系統的にとりあつかえる。

ii) この近似においても三体の unitary を満す。

iii) (4) は Fredholm 形式で解くことができる。

ことなどが上げられる。

応用として次の散乱過程がとりあつかわれている。

i) $N + D \rightarrow N + D$

$\rightarrow N + N + N$

D の波動関数がよくわかっているので、いい結果がでる。

ii) N を π と N の bound state と考えると、

$N + \pi \rightarrow N + \pi$ (Chew-Low に一致する)

さらに N^* を入れて、

$N + \pi \rightarrow N + \pi + \pi$

をとりあつかうことができる。