

# Escape rate of symmetric Markov processes

岡山大学大学院自然科学研究科・環境理工学部 塩沢 裕一

Yuichi Shiozawa

Graduate School of Natural Science and Technology

Department of Environmental and Mathematical Sciences

Okayama University

本講演では、内部消滅を持たない対称マルコフ過程の無限遠方への脱出レートの上限を、体積増大度と係数増大度で特徴づける。本予稿では飛躍型対称マルコフ過程の場合に結果を述べるが、飛躍拡散型対称マルコフ過程の場合も同様の結果が得られる。

$(X, d)$  を局所コンパクト可分距離空間とし、 $m$  を  $X$  上の正値ラドン測度で  $X$  全体に台を持つものとする。 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  を  $L^2(X; m)$  上の正則ディリクレ形式とし、 $\mathbf{M} = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in X})$  を  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  から生成される  $m$  対称マルコフ過程とする。 $X$  上の台がコンパクトな連続関数全体を  $C_0(X)$  とかき、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  の Beurling-Deny 分解に非局所項のみが現れることを仮定する：

$$\mathcal{E}(u, v) = \iint_{X \times X \setminus \text{diag}} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) J(dx dy) \quad u, v \in \mathcal{F} \cap C_0(X).$$

ただし、 $\text{diag}$  は  $X \times X$  上の対角線集合であり、 $J(dx dy)$  は  $X \times X \setminus \text{diag}$  上の正値対称ラドン測度である。また、 $J(dx dy) = J(x, dy)m(dx)$  を満たす積分核  $J(x, dy)$  の存在を仮定する。

$X$  上の関数  $\rho$  に対して  $B_\rho(r) := \{x \in X \mid \rho(x) < r\}$  ( $r > 0$ ) とおき、 $\mathcal{A}$  を次で定める：

$$\mathcal{A} := \left\{ \rho \in C(X) \cap \mathcal{F}_{\text{loc}} \mid \lim_{x \rightarrow \Delta} \rho(x) = \infty, \text{ 各 } r > 0 \text{ について } B_\rho(r) \text{ は相対コンパクト} \right\}.$$

**仮定 1.**  $X$  上の単調非減少な非負値関数列  $\{\rho_R\}_{R \geq 1} \subset \mathcal{A}$  と  $X \times X \setminus \text{diag}$  上の単調増加な非負値関数列  $\{F_R\}_{R \geq 1}$  が存在して、次の条件が成立する：

(i) 各  $R \geq 1$  に対して次が成立する：

$$\bullet M_1(R) := \sup_{x \in B_{\rho_R}(R)} \int_{0 < d(x, y) < F_R(x, y)} (\rho_R(x) - \rho_R(y))^2 J(x, dy) < \infty;$$

$$\bullet M_2(R) := \sup_{x \in X} \int_{d(x, y) \geq F_R(x, y)} J(x, dy) < \infty.$$

(ii) 各コンパクト集合  $K \subset X$  に対して、すべての十分大きな  $R$  について  $K \subset B_{\rho_R}(R/4)$ .

(iii)  $\rho := \rho_1$  とおく。すべての十分大きな  $R$  に対して

$$0 < d(x, y) < F_R(x, y) \implies |\rho_R(x) - \rho_R(y)| < \frac{1}{32} \cdot \frac{R}{\log m(B_\rho(R)) + \log \log R}.$$

関数  $F_R$  は“飛躍の大きさ”を定め、関数  $\rho_R$  は“小さい飛躍”に適合した長さを表す。

$N_1(R)$  は  $M_1(R) \leq N_1(R)$  を満たす単調非減少関数とし、 $N_2(R)$  は  $M_2(R) \leq N_2(R)$  を満たす単調非増加関数とする。  $\mu \in [0, 2)$  を固定し、関数  $\psi_\mu(R)$  を次で定める：

$$\psi_\mu(R) := \frac{R^{2-\mu}}{N_1(R) \cdot (\log m(B_\rho(R)) + \log \log R)}.$$

**仮定 2.** (i) すべての十分大きな  $R$  について  $\psi_\mu(R)$  は単調増加かつ  $\lim_{R \rightarrow \infty} \psi_\mu(R) = \infty$ .  
(ii) 定数  $\nu > 1$  と  $c > 0$  が存在して

$$\psi_\mu(R) N_2(R) \leq \frac{c}{(\log R)^\nu}.$$

仮定 2 (ii) は“大きい飛躍”の起こる頻度を制限する。

**定理 1.**  $M$  は保存的であることを仮定する。仮定 1, 2 の下、定数  $c > 0$  が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho(X_t)}{\psi_\mu^{-1}(ct)} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s., } m\text{-a.e. } x \in X.$$

定理 1 はリーマン多様体上のブラウン運動に関する Grigor'yan (1999) の結果を純飛躍型マルコフ過程へ拡張している。一方、Grigor'yan (1999) の結果は、リーマン多様体上のブラウン運動および対称拡散過程の枠組みで、Grigor'yan-Hsu (2009), Hsu-Qin (2010), Ouyang (2013) により一般化および精密化されている。これらの結果は、Huang (J. Theoret. Probab. に掲載予定), Huang-S. (2014) によって、局所有限な重み付きグラフ上のマルコフ連鎖にも拡張されている。

**例 1.**  $(X, d)$  を  $d$  次元ユークリッド空間とし、 $|\cdot|$  をユークリッドノルムとする。  $m$  を  $d$  次元ルベーグ測度とし、積分核  $J(x, dy)$  について次を仮定する。

- $J(x, dy)$  は  $m$  に絶対連続であり、定数  $\alpha \in (0, 2)$  が存在して密度関数  $J(x, y)$  は

$$J(x, y) \leq \frac{c(x, y)}{|x - y|^{d+\alpha}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \text{diag}$$

を満たす。ただし、 $c(x, y)$  は  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  上の正値可測関数であり、定数  $\delta \in [0, 1)$  と  $q \in [0, \alpha)$  が存在して次を満たすものとする：

$$c(x, y) \asymp \begin{cases} (1 + |x|)^2 (\log(2 + |x|))^\delta + (1 + |y|)^2 (\log(2 + |y|))^\delta, & |x - y| < 1, \\ (1 + |x|)^q + (1 + |y|)^q, & |x - y| \geq 1. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^d$  上の台がコンパクトで滑らかな関数全体を  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  とかく。すると、 $L^2(\mathbb{R}^d)$  上の二次形式  $(\mathcal{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$  は可閉となり、その閉包  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  は  $L^2(\mathbb{R}^d)$  上の正則ディリクレ形式となる (例えば Fukushima-Oshima-Takeda (2011) の Example 1.2.4 を参照せよ)。  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  が生成する対称マルコフ過程を  $M = (\{X_t\}_{t \geq 0}, \{P_x\}_{x \in \mathbb{R}^d})$  とかく。

(a)  $\alpha - q > 1 - \delta$  ならば, 定数  $c > 0$  が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{1-\delta}}}} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s., a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

(b)  $0 < \alpha - q \leq 1 - \delta$  ならば,  $0 < \varepsilon < \alpha - q + \delta$  を満たす任意の正数  $\varepsilon$  に対して定数  $c > 0$  が存在して

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t - X_0|}{e^{ct^{\frac{1}{\alpha-q-\varepsilon}}}} \leq 1 \quad P_x\text{-a.s., a.e. } x \in \mathbb{R}^d.$$

$\delta = 1$  かつ  $q \in [0, \alpha)$  のとき, 対称マルコフ過程  $\mathbf{M}$  は保存的である [S. (Forum Math. に掲載予定)]. しかし, 脱出レートの上限は分からない.