

p 進 Hodge 理論とゼータの値

東京工業大学 加藤和也

§ 1. 城崎と宇宙

創建千年の歴史をもつ城崎温泉寺の石段を登るとき，ここを歩いた昔の人々のことがしのばれ，この石段を過ぎ去っていった年月のことが思われてくる。仏教の法のごとは全く理解していない筆者であるが， p 進 Hodge 理論のような数学の深い法もまた，この温泉寺の犬気の中に，千年も億年もきらきらまじり入って，人間や生物の生活とともにあったにちがいない。この石段に落ちた紅葉の１つ１つが，どんな数学の法則をあらわし，城崎を囲む山々の１つ１つの峰の形が，宇宙の始まりに関わるどのような真理の姿をかたどっているのであろうか。建築家カウディが自分の故郷の山の形に似せてバルセローナの教会の尖塔を設計したとされることから，山の形が，宇宙の真理をかたどっていることは知れるのである。

筆者は[4]において，鶴の思返しの鶴の思いが，宇宙の起源を考える鍵であることを書いた。そこには，鶴女房のみな

らず、蛇女房や雪女もあらわれたのであった。(その後こぶとりじいさんまであらわれた時は筆者もさすがにうるたえたが、こぶとりじいさんについてはまだ論ずるに至っていない。) それらを書きながら、当時の筆者は自分でもちょっとついてゆけないものを感じたが、今はちゃんとついてゆけるし、実に自然なことのように思える。鶴の恩返しのような昔話や童話には、我々の祖先がまだ原生生物やそれ以前のものであった頃からの、悲しみや喜びの記憶を形にした所がある。したがって、土曜日7時からのテレビの「日本昔ばなし」を見ることは、宇宙の起源を思うことであり、 P 進 Hodge 理論を思うことであるにちがいない。

筆者は狂ってしまったのであろうか。いまだ狂い足らざることを恥ずるのみである。人間はみな狂っていて、子に狂い、孫に狂うものであること、 P 進 Hodge 理論を発展させた最大の功労者 Fontaine も、かつては、変な研究をやっている「ゲルノーブルの狂人」と目されながら、雪深い山小屋でひとり、 P 進 Hodge 理論の想を練ったことを考えたい。最近、息子とディズニー映画「美女と野獣」を見た。この漫画映画を「原作の味をそこなった」と嫌うかたもあらわれるけれども、私はすばらしいと思う理由は、主人公の娘さんもその父親もいかれていて、映画はそれを力強く支持していることである。娘さん

は、夢のようなことばかり考える「いかれた娘」として登場し、「友達もいない」といい（子供が見る映画で、友達もいなくなるいかれたたを賞め讃える映画、というのはかなり思い切っていると思う）、その父親は完全にいかれた発明家であり、そして彼らはいかれているがゆえに森の中の魔法の城にたどりつけるのである。

§2. p 進 Hodge 理論とゼータの値

p 進 Hodge 理論と、ゼータの値の研究のような数論とは、かなりかけ離れた心持ちのものである。数論は、ある数が有理数か無理数か、ある素数でわりきれるかどうか、とか、非常に微妙な話をとうとぶのであるが、p 進 Hodge 理論の方は、代数多様体なら何でも持ってこいという、細かい所は気にしない性格である。しかしながら、異質なもののふれあう所に大きな数学の発展の生まれることは、常々見られることである。九州での学会で筆者が指摘したように、白壁・水・酒倉の柳川の風土と、長崎のキリシタン文化という、異質なものをふれあわせて、北原白秋の処女詩集「邪宗門」が生まれたことは、その典型的な例ではあるまいか。また、南から北へ目を移すならば、函館の町の美しさというものが、明治の初め

に港として外国の文化にふれた驚きを、そのまま結晶して今に残しているためであろうことも、その典型的な例ではなからうか。

§3. 宇宙は心？

あとで §5 に述べる探検を筆者が考え実行したとき、その方針は、ゼータの心を推しはかるということであった。ゼータは必ずそこにやってくる。複素関数として定義されるゼータにとって、大変苦手な、 P 進 Hodge の山道を、ゼータは与ひょうに会うために切ない思いをもって、必ず越えてくる。(鶴が娘に姿を変えたように) K_2 の中の「ゼータの化身」に姿を変えて。

ゼータに心があるというと、顔をそむける人もいるかもしれぬ。しかし、犬に心があることはもちろんだが、ロボットにも、そのうち(ロボットが高等化すれば)心があると人が認めるようになるであろうし、人形にも心、原稿用紙にも心、ボールペンにも心があるという人だっているのである。ゼータに心を感じるのは、単に我々の心を投影しているだけだという人もあるかもしれないが、実は逆に我々の心が、ゼータの心の投影かもしれないことはいうまでもない。

上野健爾さんに、「宇宙は物質だから……」と筆者が話しかけ

たとき、「宇宙は物質ですか？」と疑問を投げかけられてしまったことがあった。上野さんのお考えは、筆者ごときの推しはかれるところではないか、すると宇宙は「心」なのであるうか。

宇宙 = 心 = ゼータ

なのであるうか。最近筆者は息子とともに映画「ゴジラ対モスラ」を見たが、さすがに映画の中味は、中年男の感動を呼ぶものではなかった。しかし、映画が始まるまで20分間場内に流れ続けた「モスラやモスラ……」という主題歌[6]は、1番がまじないの言葉だけでできていて、2番になってやっと、「時を越えて海を越えて」モスラが来てくれる、という日本語がはいってくる、見事な構成であって胸にせまるものがあり、聞いているうちに中年男は不覚の涙を落とすところであった。宇宙の遠い涯てにむかって、存在するかしないかわからない親を哀しく呼ぶようなその歌は、ゼータを呼ぶ歌でもあり、

…………… = モスラ

と、さっきの等式は続くのであるうか。

とにもかくにも、このような「ゼータの心を推しはかる」という方法が、実際に役に立つことは、驚きと言わざるをえない。そしてそのような方法の数学における大切さは、今後もっとももっと強まっていくようにも思えるのである。(これが筆者が[0]を数学の教科書として講義に用いる理由である。)

§4. ワープ航法の発見.

銀河系とアンドロメダ星雲の間には、ほとんど旅行不可能と思えるほどの大きな距離がある。筆者はつい先日、それのり越える、explicit reciprocity lawを用いた驚くべきワープ航法を発見した。以下、それを説明する。

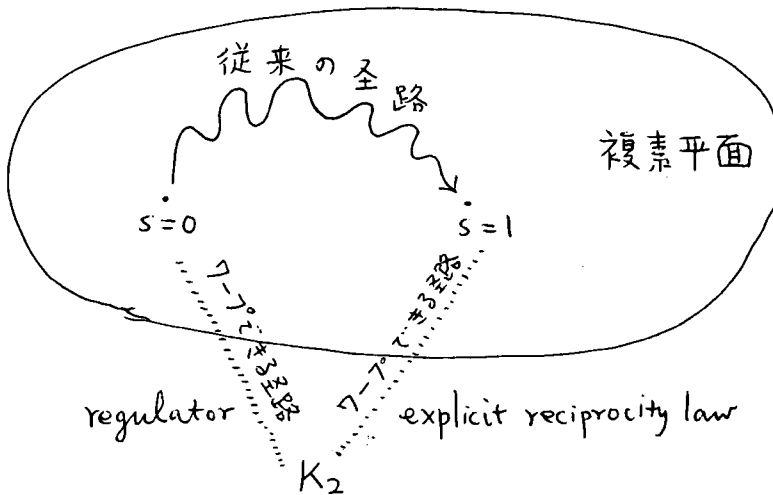
(通常の上半平面の) 保型形式 f の zeta 関数 $L(f, s)$ の $s=1$ での値は、数論のさまざまな問題 (たとえば Birch, Swinnerton-Dyer 予想) に関連した、大切な値である。一方、 $L(f, s)$ は $s=0$ で 1 位の零点を持つが、1 階微分の値 $L'(f, 0)$ と、 $L(f, 1)$ は、数論から見て、1 方のことを 1 方のことに全く応用することかできないほど、かけ離れた数学的対象であった。そのため、これまでは、 $L'(f, 0)$ と K_2 の間の関係についての Bloch や Beilinson の理論は、 $L(f, 1)$ についての研究には全く役に立たず、「 K_2 は K_2 のためにのみあり、数論の役には立たぬ」と悪口をいう人もいたのである。

このように「 $s=0$ の様子」と「 $s=1$ の様子」はかけ離れた現象であると思え、 $s=0$ から $s=1$ へゆくことは非常に遠かったのである。

このように遠かったのは、今までは、複素平面の中で $s=0$ から $s=1$ へ動いていたからである (図参照)。複素平面の中

で $s=0$ から $s=1$ まで動くことは、我々の知っている、宇宙内の点から宇宙内の点への、ふつうの移動法である。

ワープ航法の図



しかしながら §5 に述べるのは、 $L(f, 0)$ から $L(f, 1)$ へ移る新しい方法である。これは K_2 を通り、 P 進 Hodge 理論を用いて一般化された explicit reciprocity law, を通ってゆくものである。この方法では、以前全く数論的に無縁であったはずの $s=0$ と $s=1$ は深く結びついているのであり、 $s=0$ での理論が $s=1$ での強力な結果をもたらすのである。つまりこの方法では、 $s=0$ と $s=1$ の 2 点は非常に近いのである。

この、複素平面の中を歩いていかないうち $s=0$ から $s=1$ への移動こそは、explicit reciprocity law によるワープ航法であり、千年のうちには宇宙旅行に実用化されるように思える。このような考えをいかれた夢という人もいるかもしれないが、大発明のための多くのアイデアは、かつてそのように言われた

のである。

実際の所, $s=0$ から $s=1$ へゆくこの新しいゆきかたが,
我々を宇宙空間の新しい認識に導くであろうことは, 言え
たない。

§5. explicit reciprocity law の一般化と保型形式の zeta の値

P 進 Hodge 理論と zeta の値の関係の研究の応用として, [2]
で, Kolyvagin の次の結果の, 別証を, 説明した。

「 E が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で, モジュラー曲線から全射があると
する。 E の zeta 関数を $L(E, s)$ と書くと,

$$L(E, 1) \neq 0 \implies \#(E(\mathbb{Q})) < \infty$$

この別証の方法をこの §5 で簡単に思いあこし, [2] に述べ
なかった, explicit reciprocity law の一般化との関係を述べたい。
筆者の方法は, §4 の図の $\dots\dots$ の航路をゆくもので, 次の3
段階に要約される。

① (これは Beilinson の仕事である。) Beilinson はモジュラー曲
線の K_2 の中に, 「ゼータの化身」というべき元の族を発見した。
そのゼータの化身と呼ぶべき由縁は, K_2 からの regulator map
を通して, これらの元が, weight 2 の保型形式 f についての
 $L'(f, 0)$ や, もっと詳しくは $L'_{\equiv a \bmod N}(f, 0)$ を表わすという

ことである。($L(f, s) = \sum_{n \geq 1} c_n n^{-s}$ と書くとき,

$$L \equiv a_{\text{mod } N}(f, s) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{N}}} c_n n^{-s}$$

と定義する。)

② Beilinson の得た “ K_2 の中のゼータの化身 ” のなす

“ norm compatible system ” から, カロア・コホモロジー群

$$H^1(\mathbb{Q}(\mathbb{S}_N), H_{\text{et}}^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)(1))$$

(X はモジュラー曲線, $\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}$, $N \geq 1$, $\mathbb{S}_N$ は 1 の原始 N 乗根) の元を作る。(これは全く形式的にできる。) すると, 驚くべきことは, これらの元は, 自分たちがもともとゼータの化身であったことを忘れない, すなわちなおもゼータの化身と呼ばれるべき元であり, p 進 Hodge 理論からくる map

$$\exp^* : H^1(\mathbb{Q}(\mathbb{S}_N), H_{\text{et}}^1(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)(1)) \rightarrow \mathbb{Q}(\mathbb{S}_N) \otimes H^0(X, \Omega_X^1) \otimes \mathbb{Q}_p$$

を通じて $L \equiv a_{\text{mod } N}(f, 1)$ をこれらの元が表わす, ということが生ずる本当の理由は, 不明である。「ゼータの懸命な心」としか, とうえようがない) が証明できる。この証明 (この話の最も重要で困難な箇所)

に, 後述の一般化された explicit reciprocity law を用いるのであるが, この点を [2] では省略してしまった。

(①で zeta 関数の $s=0$ での様子があらわれていたものが, ②では $s=1$ での様子があらわれており, 貝事にワープがおこなわれたことになるのである。)

③ ②で得た, カロア・コホモロジーと関連した p -adic な zeta の値の表示は, 非常に強力で, そこから簡単に (楕円曲

線 E に対し, $L(f, s) = L(E, s)$ なる保型形式 f を持ち出すことにより), $L(E, 1) \neq 0 \Rightarrow \#(E(\mathbb{Q})) < \infty$ が導きだせる。この③は非常に簡単な議論となる。

以下で, ②に用いられる一般化された explicit reciprocity law を説明する。これは [1] [3] [5] におこなった explicit reciprocity law の一般化とは, 異なる一般化である。

K を完備離散付値体とし, F をその剰余体, K の標数は 0, F の標数は $p > 0$ で $[F:F^p] = p^r < \infty$ とする。

$n \geq 0$ に対し, ζ_{p^n} を 1 の原始 p^n 乗根とし

$$K_n = K(\zeta_{p^n})$$

とあき, Milnor K 群についての norm compatible system

$$\varprojlim_n K_{r+1}^M(K_n) \quad (\varprojlim \text{ は norm に関してとる})$$

を考える。通常の explicit reciprocity law では剰余体 F は perfect (つまり $r=0$) であり, その場合我々は乗法群についての norm compatible system

$$\varprojlim_n K_1^M(K_n) = \varprojlim_n (K_n)^\times$$

を考えるわけであるが, 今我々はその状況の一般化を, Milnor の K 群を用いて考えているわけである。

$n \geq 1$ を fix し, $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底 ε をとり, 次の合成写像 (各 map はあとで説明)

$$\textcircled{H}: \varprojlim_{m \geq n} K_{r+1}^M(K_m) \xrightarrow{S_\xi} H^{r+1}(K_n, \mathbb{Q}_p(r)) \xrightarrow{\exp^*} K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$$

を具体的に計算するのか, 我々の explicit reciprocity law である。

こゝにまず,

$$\hat{\Omega}_{K_n}^q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim_{\mathbb{Z}} \left(\Omega_{O_{K_n}/\mathbb{Z}}^q / p^k \Omega_{O_{K_n}/\mathbb{Z}}^q \right) \quad (q \in \mathbb{Z})$$

(Ω^q は q 次外微分形式の加群). 次に S_ξ は, 次の合成写像

の $\varprojlim_m$ である:

$$\begin{aligned} K_{r+1}^M(K_m) &\xrightarrow{(1)} H^{r+1}(K_m, \mathbb{Z}/p^m(r+1)) \stackrel{(2)}{\cong} H^{r+1}(K_m, \mathbb{Z}/p^m(r)) \\ &\xrightarrow{(3)} H^{r+1}(K_n, \mathbb{Z}/p^m(r)) \end{aligned}$$

こゝに (1) は cohomological symbol map, (2) は

$$\mathbb{Z}/p^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/p^m(1); \quad 1 \mapsto \xi \bmod p^n$$

による同型, (3) は corestriction map である。

最後に $\exp^*$ であるが定義は大変である。($r=0$ で剰余体 F が有限体の場合, この

$$\exp^*: H^1(K_n, \mathbb{Q}_p) \rightarrow K_n$$

は, $K_n \xrightarrow{\exp} K_n^\times \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{局所類体論}} \text{Gal}(K_n^{\text{ab}}/K_n) \otimes \mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}_p$ -双対

になる。) F が完全体の場合には, Fontaine の定義した B_{dR} という K を含む巨大な体のあることは, [2] にも述べたが, 剰余体が完全体と限らない K にも B_{dR} の理論がある (都築[7]).

B_{dR} は K を含む巨大な環で, $d: K \rightarrow \hat{\Omega}_K^1$ と両立する connection

$$\nabla : B_{dR} \rightarrow B_{dR} \otimes_K \hat{\Omega}_K^1$$

をもち, B_{dR} には $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ が作用し, さらに B_{dR} はこの作用と両立する filtration $\{B_{dR}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ をもっている, $K \subset B_{dR}^0$,

$$0 \rightarrow B_{dR}^{i, \nabla=0} \rightarrow B_{dR}^i \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^{i-1} \otimes_K \hat{\Omega}_K^1 \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^{i-2} \otimes_K \hat{\Omega}_K^2 \xrightarrow{\nabla} \dots$$

は exact になる. さらに B_{dR}^i 係数のガロア・コホモロジーは,

$$H^q(K, B_{dR}^i) = 0 \quad \text{if } q \neq 0, 1 \text{ または } i \geq 1,$$

$$H^1(K, B_{dR}^i) \xleftarrow[(*)]{\cong} H^0(K, B_{dR}^i) \xleftarrow[(**)]{\cong} K \quad \text{if } i \leq 0$$

こゝに $(*)$ は $H^1(K, \mathbb{Z}_p) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(K^{ab}/K), \mathbb{Z}_p)$ の元

$$\text{Gal}(K^{ab}/K) \xrightarrow{1 \text{ の } p \text{ 中根の作用}} \mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\log} \mathbb{Z}_p$$

を cup 積すること, $(**)$ は $K \subset B_{dR}^0$ によるもの. ([7]).

以上のことから, exact sequence

$$0 \rightarrow B_{dR}^{r, \nabla=0} \rightarrow B_{dR}^r \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^{r-1} \otimes_K \hat{\Omega}_K^1 \xrightarrow{\nabla} \dots \xrightarrow{\nabla} B_{dR}^0 \otimes_K \hat{\Omega}_K^r \rightarrow 0$$

は, 次の同型 δ を与える:

$$\begin{aligned} K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r &\cong H^0(K_n, B_{dR}^0 \otimes_K \hat{\Omega}_K^r) \xrightarrow[(*)]{\cong} H^1(K_n, B_{dR}^0 \otimes_K \hat{\Omega}_K^r) \\ &\xrightarrow[\cong]{\delta} H^{r+1}(K_n, B_{dR}^{r, \nabla=0}) \end{aligned}$$

これと $\mathbb{Q}_p(r) \subset B_{dR}^{r, \nabla=0}$ により, 得られる

$$H^{r+1}(K_n, \mathbb{Q}_p(r)) \rightarrow H^{r+1}(K_n, B_{dR}^{r, \nabla=0}) \cong K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$$

が $\exp^*$ である。

一般化した explicit reciprocity law とは, 次の定理である:

定理: (簡単のため) p が K の素元であるとする。(さらに簡単のため $K_{r+1}^M(O_{K_n})$ を $K_{r+1}^M(K_n)$ の

$$\{f_1, \dots, f_{r+1}\} \quad f_1, \dots, f_{r+1} \in (O_{K_n})^\times$$

で生成される部分群とし $\varprojlim_{m \geq n} K_{r+1}^M(O_{K_m})$ の元の $K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$ での像のみ計算する。結果は次のとおり:

$(u_m)_m \in \varprojlim_{m \geq n} K_{r+1}^M(O_{K_m})$ とすると, $(u_m)_m$ の $\oplus$ による

$K_n \otimes_K \hat{\Omega}_K^r$ での像は, 各 $m \geq n$ に対する u_m の

$$\begin{aligned} K_{r+1}^M(O_{K_m}) &\longrightarrow \hat{\Omega}_{O_{K_m}/\mathbb{Z}}^{r+1} \\ \{f_1, \dots, f_{r+1}\} &\longmapsto \frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_{r+1}}{f_{r+1}} \\ &\cong O_{K_m}/I_m \otimes_{O_K} \hat{\Omega}_{O_K/\mathbb{Z}}^r \\ a\omega \wedge \frac{dS_{pm}}{S_{pm}} &\longleftarrow a \otimes \omega \\ &\xrightarrow{\frac{1}{p^{m-n}} \text{Trace}} O_{K_n}/(p^{m-1}) \otimes_{O_K} \hat{\Omega}_{O_K/\mathbb{Z}}^r \end{aligned}$$

による像の $\varprojlim_m$ に p^{-n} をかけたものである。こゝに,

$\hat{\Omega}_{\dots} = \varprojlim_k \Omega_{\dots}/p^k \Omega_{\dots}$, S_{pm} は $\mathbb{Z}$ に伴う 1 の原始 p^m 乗根, I_m は O_{K_m} の ideal で, $(p^m) \subset I_m \subset (p^{m-1})$ となるもの, $\frac{1}{p^{m-n}} \text{Trace}$ は $\text{Trace} : O_{K_m} \rightarrow O_{K_n}$ (この像 $= p^{m-n} O_{K_n}$) の $\frac{1}{p^{m-n}}$ 倍加算写像である。

- [3] K. Kato, explicit reciprocity law と zeta の値, 数理解析研講
 究録 810 (1992)
- [4] K. Kato, ゼータ元に関する一考察, 1992年度代数学シ
 ンポジウム報告集
- [5] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory of
 Hasse-Weil L-functions via B_{dR} , preprint
- [6] 田中友幸他(作詞), 古関裕而(作曲) 今村恵子・大沢さやか(歌),
 モスラの歌
- [7] N. Tsuzuki: Variation of B_{dR} , preprint

少し余白があるので, 小学校1年の息子の国語の教科書に
 ある, 感銘を受けた童話のあらすじを紹介する(松谷みよ子作.)

子りすがくるみの木から, 自分のひいひいひいひいおじい
 さんの話を聞く。「とてもしっぽの美しいりすだった。自分は
 芽を出した時, 自分を土の中に埋めたまま食べ忘れたそのり
 すに, あなたのひいひいひいひい孫においしいくるみの実を
 食べさせてあげると約束をした」と。子りすは自分も土に埋
 めて食べ忘れたくるみの実のあることを思い出す。そのくる
 みはもう芽を出していて, 子りすに, あなたのひいひいひい
 ひい孫においしいくるみを食べさせると約束する。子りすは
 とても喜んで, その芽のまわりを走り回る。(原文はとても美しい。
 昔の国語の教科書には, こんな良い話は, のってなかったような気がする。)