

Theory of random operators and its applications

東工大 理 伊藤 茂

1. 序. (偏微分) 方程式を解く一般的手段としては, 不動点定理以外に写像定理がある. 特に 1960 年代以降 Browder, Minty 等によって与えられた *monotone operator* に対する写像定理がよく知られている (cf. Vainberg [6]). ランダム・パラメータを含む写像に対する不動点定理 (*random fixed point theorem*) の場合と同様に, 写像定理に対しても ランダム・パラメータを含む場合への拡張が考えられる. ここでは Kuratowski と Ryll-Nardzewski [5], Himmelberg [2] 等により研究された *multivalued measurable mapping* とその *measurable selector* の理論を用いることにより, *random* な写像定理とでも言うべき結果を証明し, その応用として, ランダム・パラメータを含む *Hammerstein type* の方程式の解の存在定理を与える. なおより詳しい結果については Itoh [3] を参照のこと.

2. 定義及び記号. 以下 $(\Omega, \mathcal{A})$: 可測空間, Y : 距離空間, 2^Y : Y の部分集合全体とする. $T: \Omega \rightarrow 2^Y$ とする. T が (weakly) measurable $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall B \subset Y$: 閉 (開) 集合に対して, $T^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$. 一般に T が measurable $\Rightarrow T$ は weakly measurable. さらに $\forall \omega \in \Omega$ に対して $T(\omega)$ が compact の時は逆が成り立つ. $\xi: \Omega \rightarrow Y$ が T の measurable selector $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \xi$ は measurable で $\forall \omega \in \Omega$ に対して $\xi(\omega) \in T(\omega)$. これらのより詳しい survey については Wagner [7] を参照のこと.

Proposition 1. (Himmelberg [2]). Y : 可分完備, $T: \Omega \rightarrow CD(Y)$ (Y の空でない閉集合全体) とする. このとき, T が weakly measurable $\iff \exists$ (可算個) $\xi_n: \Omega \rightarrow Y$: T の measurable selector で, $\forall \omega \in \Omega$ に対して, $T(\omega) = \mathcal{Q}\{\xi_n(\omega)\}$, ここで $\mathcal{Q}(B)$ は B の closure.

Proposition 2. (Himmelberg [2]). Y : 同上, $T_n: \Omega \rightarrow CD(Y)$: weakly measurable で, $\forall \omega \in \Omega$ に対してある $T_n(\omega)$ が compact とする. $\Rightarrow T: \Omega \rightarrow 2^Y$ を $T(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n(\omega)$ で定義すると, T は measurable.

次に X : 実 reflexive Banach 空間, X^* : X の dual 空間,

$F: X \rightarrow X^*$ とする. F が *monotone* $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in X$ に対して,
 $(Fx - Fy, x - y) \geq 0$, 二重 $(\cdot, \cdot)$ は X と X^* の *duality pairing*.
 F が *hemicontinuous* $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in X$ に対して, $t_n > 0$, $t_n \rightarrow 0$ ならば $F(x + t_n y) \rightarrow F(x)$ (weak). F が *demi-*
continuous $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} X \ni x_n, x_n \rightarrow x_0$ (strong) ならば $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$.
 実はこの場合 F が *monotone* ならば, F が *hemicontinuous* $\Leftrightarrow F$
 が *demicontinuous*. とくに, X が有限次元で F が *monotone* のと
 き, F が *hemicontinuous* $\Leftrightarrow F$ が連続, i.e., $X \ni x_n, x_n \rightarrow x_0$ なら
 ば $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$. *Monotone operator* に関する詳しい結果は
 Vainberg [6] を参照のこと. F が有界 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall D \subset X$: 有界集
 合に対して $F(D) \subset X^*$: 有界.

さて $F: \Omega \times X \rightarrow X^*$ とする. F が *random operator* $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
 $\forall x \in X$, $F(\cdot)x$ が measurable. F が *coercive* $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 関数 c :
 $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (実数) で, $r \rightarrow \infty$ ならば $c(r) \rightarrow \infty$ となるものが
 あって, $\forall \omega \in \Omega, \forall x \in X (x \neq 0)$ に対して $(F(\omega)x, x) \geq c(\|x\|)\|x\|$.
 F が *hemicontinuous* (*monotone*, 他) $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \omega \in \Omega, F(\omega)$ が
hemicontinuous (*monotone*, 他). また $B(\Omega, X) = \{\xi: \Omega \rightarrow X \mid$
 $\xi \text{ measurable で, } \sup_{\omega \in \Omega} \|\xi(\omega)\| < \infty\}$ とする.

3. Monotone operators.

Lemma 1. X : 有限次元, $F: \Omega \times X \rightarrow X^*$: coercive 連続 random operator, $\eta \in B(\Omega, X^*)$ とする. $\Rightarrow \exists \xi \in B(\Omega, X)$ で, $\forall \omega \in \Omega, F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

(Proof) $\eta \equiv 0$ の場合に言えばよい ($\because$ もしそうしなければ $G: \Omega \times X \rightarrow X^*$ を $G(\omega)x = F(\omega)x - \eta(\omega)$ で定義すれば, G は F と同じ条件を満たす). Browder の結果 (cf. Vainberg [6]) より $\forall \omega \in \Omega, \exists x \in X, F(\omega)x = 0$. そこで $T: \Omega \rightarrow CD(X)$ を $T(\omega) = \{x \in X \mid F(\omega)x = 0\}$ とおくと, F が coercive より $\exists M > 0, \forall \omega \in \Omega, F(\omega) \subset D = \{x \in X \mid \|x\| \leq M\}$. D は compact で F が連続より T は measurable となる. よって Proposition 1 より T の measurable selector $\xi: \Omega \rightarrow X$ があるが, この ξ が求めるものである. Q.E.D.

Lemma 2. (Browder, Minty (cf. Vainberg [6])). $D \subset X$: dense linear, $F: D \rightarrow X^*$: hemicontinuous, $\exists x_0 \in D, \exists y_0 \in X^*$ で, $\forall x \in D, (Fx - y_0, x - x_0) \geq 0 \Rightarrow Fx_0 = y_0$.

Theorem 1. X : 可分, $F: \Omega \times X \rightarrow X^*$: coercive hemicontinuous monotone random operator, $\eta \in B(\Omega, X^*)$ とする. $\Rightarrow \exists \xi \in B(\Omega, X), \forall \omega \in \Omega, F(\omega)\xi(\omega) = \eta(\omega)$.

(Proof) いわゆる Galerkin 法による. $\eta \equiv 0$ としてよい.
 X が可分より $X_n \subset X$: 有限次元線形部分空間で, $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$ かつ $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ が X で dense になるものが存在する. $j_n: X_n \rightarrow X$: injection, $j_n^*: X^* \rightarrow X_n^*$: j_n の dual とし, $F_n: \Omega \times X_n \rightarrow X_n^*$ を $F_n(\omega)x = j_n^* \cdot F(\omega)x$ で定義すると, F_n は coercive 連続 random operator で, Lemma 1 より $\exists \xi_n: \Omega \rightarrow X_n$: measurable で, $\forall \omega \in \Omega, F(\omega)\xi_n(\omega) = 0$. F の coercivity より $\exists M > 0$ で, $\|\xi_n(\omega)\| \leq M$ ($\omega \in \Omega, n=1,2,\dots$). $D = \{x \in X \mid \|x\| \leq M\}$ は weakly compact で, X が可分より D の weak topology は metrizable, i.e., D は compact 距離空間と考えてよい. 各 n に対して, $G_n: \Omega \rightarrow WK(D)$ (D の空でない weakly compact 部分集合全体) を $G_n(\omega) = w\text{-cl} \{\xi_i(\omega) \mid i \geq n\}$, 但し $w\text{-cl}(B)$ は B の weak closure, で定義すると, Proposition 1 より G_n は w -measurable, i.e., measurable in weak topology. $\Sigma = \{G: \Omega \rightarrow WK(D) \mid G(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n(\omega) \text{ で定義すると, Proposition 2 より } G \text{ は } w\text{-measurable. よって Proposition 1 より } G \text{ の } w\text{-measurable selector } \xi: \Omega \rightarrow D \text{ が存在する. } \forall x^* \in X^* \text{ に対して, } (x^*, \xi(\cdot)): \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ は可測関数で, } X \text{ は可分だから } \xi \text{ は measurable である (cf. Hille と Phillips [1]). } \omega \in \Omega \text{ を任意に fix する. } \{\xi_n(\omega)\} \text{ の部分列 } \{\xi_m(\omega)\} \text{ で, } \xi_m(\omega) \rightarrow$

$\xi(\omega)$ とするものがある。 $\forall x \in W$ に対して m を大にとると $x \in X_m$ だから

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (F(\omega)x - F(\omega)\xi_m(\omega), x - \xi_m(\omega)) \\ &= (F(\omega)x, x - \xi_m(\omega)) - (F(\omega)\xi_m(\omega), x - \xi_m(\omega)) \\ &= (F(\omega)x, x - \xi_m(\omega)). \end{aligned}$$

$m \rightarrow \infty$ とすると $(F(\omega)x, x - \xi(\omega)) \geq 0$. Lemma 2 より

$$F(\omega)\xi(\omega) = 0. \text{ Q.E.D.}$$

Remark. Theorem 1 は $\forall \omega \in \Omega$, $F(\omega)$ が semimonotone でも成り立つ。但し $F: X \rightarrow X^*$ が semimonotone $\stackrel{\text{def.}}{\iff} Fx = S(x, x)$, $\leq$ は $S: X \times X \rightarrow X^*$ は $\forall y \in X$, $S(\cdot, y)$ が hemicontinuous monotone $\leq$, $\forall x \in X$, $S(x, \cdot)$ が completely continuous, i.e., $y_n \rightarrow y_0$ ならば $S(x, y_n) \rightarrow S(x, y_0)$.

4. Hammerstein equations. X が性質 (π) を満たす $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists A: X^* \rightarrow X$: hemicontinuous monotone $\leq$, $A0 = 0$ かつ $\exists c > 0, \exists \alpha > 1 \leq$, $(Au, u) \geq c \|u\|^\alpha$ ($u \in X^*$). 例として Hilbert 空間, L^p ($1 < p < \infty$) 空間がある。

Theorem 2. X : 可分 $\leq$ 性質 (π) を満たす, $F: \Omega \times X \rightarrow X^*$: 有界 hemicontinuous monotone random operator, $K: \Omega \times$

$X^* \rightarrow X$: 連続線形 monotone random operator $\mathcal{L}$, $\exists M > 0$,

$(F(\omega)x, x) \geq 0$ ($\omega \in \Omega$, $\|x\| \geq M$) とする. さらに

$\sup_{\omega \in \Omega} \|F(\omega)0\| < \infty$, $\sup_{\omega \in \Omega} \|K(\omega)\| < \infty$ とする. $\Rightarrow \exists \xi \in B(\Omega, X)$, $\forall \omega \in \Omega$, $\xi(\omega) + K(\omega)F(\omega)\xi(\omega) = 0$.

(Proof) 各 n に対し $T_n: \Omega \times X^* \rightarrow X$ を

$$T_n(\omega)u = A\left(\frac{u}{n}\right) + K(\omega)^*u + K(\omega)F(\omega)K(\omega)^*u,$$

すなわち $K(\omega)^*$ は $K(\omega)$ の dual, $\mathcal{L}$ で定義すると, まず $K(\cdot)^*u$ は measurable $\mathcal{L}$, $F(\omega)$ は demicontinuous だから X が可分であることより $F(\cdot)K(\cdot)^*u$ は measurable $\mathcal{L}$ である (cf. Kannan と Salehi [4]). 従って T_n は coercive demicontinuous monotone random operator になる. Theorem 1 より $\exists \eta_n \in B(\Omega, X^*)$, $\forall \omega \in \Omega$, $T_n(\omega)\eta_n(\omega) = 0$. 条件より $\exists M > 0$ $\mathcal{L}$ $\|K(\omega)^*\eta_n(\omega)\| \leq M$ ($\omega \in \Omega$, $n=1, 2, \dots$) がわかる. Theorem 1 の証明と同様に $\mathcal{L}$ $G: \Omega \rightarrow WK(D)$ を $G(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \{K(\omega)^*\eta_n(\omega) \mid i \geq n\}$ $\mathcal{L}$ 定義すると, G は ω -measurable $\mathcal{L}$ measurable selector $\xi: \Omega \rightarrow X$ を持つ, 但し $D = \{x \in X \mid \|x\| \leq M\}$ $\mathcal{L}$ ある. $\omega \in \Omega$ を任意に fix する. すると $\{K(\omega)^*\eta_n(\omega)\}$ の部分列 $\{K(\omega)^*\eta_m(\omega)\}$ $\mathcal{L}$ $K(\omega)^*\eta_m(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$ となるものがある. $F(\omega)$ は有界だから $F(\omega)K(\omega)^*\eta_m(\omega) \rightarrow \exists v \in X^*$ $\mathcal{L}$ よい. 実は $v = F(\omega)\xi(\omega)$, $\xi(\omega) + K(\omega)v = 0$ が示せて (cf. Vainberg [6]), 求める式

$\xi(\omega) + K(\omega)F(\omega)\xi(\omega) = 0$ である。 Q.E.D.

References

- [1] E. Hille & R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc., 1957.
- [2] C. J. Himmelberg, Measurable relations, *Fund. Math.* 87(1975), 53-72.
- [3] S. Itoh, Nonlinear random equations with monotone operators in Banach spaces, *Math. Ann.* 236(1978), 133-146.
- [4] R. Kamran & H. Salehi, Random nonlinear equations and monotonic nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* 57(1977), 234-256.
- [5] K. Kuratowski & C. Ryll-Nardzewski, A general theorem on selectors, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 13(1965), 397-403.
- [6] M.M. Vainberg, *Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations*, Wiley, 1973.
- [7] D.H. Wagner, Survey of measurable selection theorems, *SIAM J. Control Optimization* 15(1977), 859-903.