

3×3 有限射影線型群のコホモロジーについての注

手塚 康誠 (Michishige Tezuka)

琉球大学理学部 (Faculty of Science)

序

これは前回の集会で話さしてもらった、スペクトル列報告です。使う記号から初めたいと思います。 $\mathbb{F}_q$ を有限体、 $\mathbb{C}$ を複素数として射影線型群 $\mathrm{PGL}_3(p)$, $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^\times$

$$\mathrm{PGL}_3(p) = \mathrm{GL}_3(p) / \mathbb{F}_p^\times, \quad \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^\times$$

と定義します。ここで $\mathbb{F}_q^\times$, $\mathbb{C}^\times$ は $\mathbb{F}_q$ 及び $\mathbb{C}$ の乗法群として

$$\mathbb{F}_q^\times = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{F}_q^\times \right\}$$

等です。このとき有限群のコホモロジー $H^*(\mathrm{PGL}_3(p), \mathbb{Z})$ を考えます。係数体を $\mathbb{Z}/p$ に限る理由として、対応する $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ について、 $p \neq 3$ とすると

$$H^*(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p) \cong H^*(\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p).$$

更に $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ の積から定義される余積 $\Delta: H^*(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p) \otimes H^*(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^*(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p)$ が非可換になることによります。 G 単射 $\mathbb{Z}/p$ 群とすると、 $H^*(G(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p)$ のポップ・代ボレル、荒木、戸田、三村、河野の諸先生の研究によってそれによると上述の $H^*(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/p)$ がランクの一番小さい G が可換とはならない例になっています。以下 PGL_3 を G とする。この係数はことわらない場合は $\mathbb{Z}/p$ とします。

1 方法と結果

前回話さしていただいたとき、構成したスペクトル列

$$(1) \quad E_2 = \text{cot}_{H(G(0), \mathbb{Z}/3)} \Rightarrow H(G(p))$$

を使って、 E_2 項を計算します。次に E_∞ 項を見たいわけですが、これは E_2 項からだけではわかりませんでした。仕方がないので、 $H(G(p))$ を別のやり方で行なってみました。 $p \equiv 4, 7 \pmod{9}$ の条件より $G(p)$ の 3-Sylow 群は位数 27 の *extra special* 3-群 E になっているので、 $H(E)$ は計算されているので、それから $H(G(p))$ を計算してみました。その結果 $E_2 = E_\infty$ となっていることがわかりました。この説明からわかりますように、この方法は全く不完全です。しかし上のスペクトル列の E_2 項はかなり計算が可能です。例外群 E_6 , $p \equiv 1 \pmod{2^n}$ (n は十分大) で係数は $\mathbb{Z}/2$ や、最近西本氏により F_4 , $p \equiv 1 \pmod{3^n}$ (n は十分大), 係数は $\mathbb{Z}/3$ で E_2 -項は計算されました。そこでこれらの群の *elementary abelian groups* は 庄司、水野先生などによりわかっているので、それらの正規化群を調べることで、 E_∞ -項がある程度わかるのでは、ないかと思っています。しかしこちらにはこれらの事は手に余ることなので、群論の方に色々教えていただければと思います。一応結果をまとめると

定理1 $G(p) = \text{PGL}(p)$, $p \equiv 4, 7 \pmod{9}$ とする。このとき次が成立します。

$$(2) \quad E_2 = E_\infty$$

$$(3) \quad \text{PSH}(G(p), \mathbb{Z}/3) = \frac{f(t)}{(1-t^9)(1-t^{12})}$$

$$f(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 3t^4 + 3t^5 + 3t^6 + 4t^7 + 4t^8 + 4t^9 + 4t^{10} + 4t^{11} + 3t^{12} \\ + 3t^{13} + 3t^{14} + 3t^{15} + 2t^{16} + t^{17} + t^{18}$$

$$\text{そこで } \text{PSH}(G(p), \mathbb{Z}/3) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dim_{\mathbb{Z}/3} H^n(G(p)) \right) t^n.$$

3 E_2 項の計算

まず Cot の定義を復習してみます。 A を体 k 上の Hopf 代数, $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ を coproduct, M は A 上の comodule ($\Delta_M: M \rightarrow M \otimes A$) とします。 $C^n(M, A) = M \otimes A^{\otimes n}$, $d^n: C^n(M, A) \rightarrow C^{n+1}(M, A)$ を

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n,$$

$$d_0^n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \Delta_M(m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

$$d_i^n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$d_{n+1}^n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$

として, $Cot_A^n(M, k) = H^n(C^*(M, A), d)$ と定義します。

次に $Cot_{H^*(G(\mathbb{C}))} (H^*(G(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/3))$ を作用をはきりさせるため $Cot_{H^*(G(\mathbb{C}))} (H^*(G(\mathbb{C})))$ と書くことにします。

coproduct $\Delta: H^*(G(\mathbb{C})) \rightarrow H^*(G(\mathbb{C})) \otimes H^*(G(\mathbb{C}))$ は積 $G(\mathbb{C}) \times G(\mathbb{C}) \rightarrow G(\mathbb{C})$ から誘導されたもの。 $p=4, 7 \pmod 9$ のとき, Frobenius F は $H^*(G_p)$ に自明に作用 (k は $\mathbb{F}_p$ の代数閉包, コホモロジーはエタール) するというのがわかるので, $H^*(G(\mathbb{C})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/3)$ は $G(\mathbb{C})_{\text{ét}} \times G \rightarrow G(\mathbb{C})_{\text{ét}}$ は $(x, g) \rightarrow g^{-1}xg$ から誘導されます。最初に必要なデータは。

定理 (Baum - Browder [B-B])

$G = G(\mathbb{C}) = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ とするとき

$$(1) \quad H^*(G) = \mathbb{Z}/3[x_1] \otimes \wedge(x_2, x_3)$$

$$(2) \quad \Delta: H^*(G) \rightarrow H^*(G) \otimes H^*(G) \text{ は}$$

$$\Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_3$$

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i \quad (i=1, 2).$$

補題 2. Comodule $\Delta_{od} H(G(\mathbb{C})_{od}) \rightarrow H(G(\mathbb{C})_{od}) \otimes H(G(\mathbb{C}))$ は

$$\Delta_{od}(x_3) = x_3 \otimes 1 + x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1$$

$$\Delta_{od}(x_i) = x_i \otimes 1, \quad i=1, 2.$$

これで cot を計算するのに必要は小青幸及はそろいましたが、まだ実際に計算するには、定義からでは大変です。しかし Kono-Mimura-Shimada [KMS] により $C^*(H(G(\mathbb{C})_{od}), H(G(\mathbb{C})))$ を適当な関係式で割ったものが与えられています。それを使って計算したものを示します。

命題 3 $E_2 \simeq (C \oplus D) \otimes \mathbb{Z}/3[\gamma_2]$

ここで

$$C = \mathbb{Z}/3[\gamma_2] \{ \mathbb{Z}/3[x_2/x_3] \otimes \Lambda(x_1) \{ \tau_0, \gamma, \tau_0 \} \oplus \mathbb{Z}/3[x_2/x_3] \otimes \Lambda(x_1) \{ \tau_0 \} \oplus \{ \sigma_0 \} \oplus \{ \sigma_1 \} \} \\ \oplus \mathbb{Z}/3[\gamma_2] \otimes \Lambda(x_1) \{ \gamma \}$$

$$D = \mathbb{Z}/3[\gamma_2] \{ \mathbb{Z}/3[x_2/x_3] \otimes \Lambda(x_1) \{ \gamma, \gamma \} \oplus (\mathbb{Z}/3[x_2/x_3] \otimes \Lambda(x_1) - \{ x_2^2 x_1 \}) \{ \gamma \} \oplus \{ \gamma \} \} \\ \oplus \mathbb{Z}/3[\gamma_2] \{ \gamma_2, x_1, \gamma \}$$

この表示を使うことで初めの定理と書いた E_2 -項の Poincaré polynomial を計算できます。

4 $G(p)$ と $H^*(G(p))$

$G(p)$, $p \equiv 4, 7 \pmod{3}$ の 3-local structure は split する完全列

$$(1) \quad 1 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \rightarrow G \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/3) \rightarrow 1$$

で与えられ行列で書くと

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & SL_2(\mathbb{Z}/3) \\ 0 & \end{pmatrix} \mid * \in \mathbb{Z}/3 \right\} \subset SL_3(\mathbb{Z}/3).$$

G と $G(p)$ の 3-sylow 群は同型で:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid * \in \mathbb{Z}/3 \right\}$$

で与えられます。(1) の完全列で $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 = \langle a, c \rangle$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}/3)$ とすると $P = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1, [a, b] = c \rangle$ となります。

補題 4 elementary 3-abelian group A について $W(A) = N_G(A)/A$, $N_G(A) = \{g \in G \mid g^{-1}Ag = A\}$ とするとき, $W(\langle c, a \rangle) = \text{SL}_2(\mathbb{Z}/3)$, $W(\langle c, b \rangle) \simeq W(\langle c, ab \rangle) \simeq S_3$ (3次対称群)。

$H^*(P)$ は Leary や Milgram-T で与えられていて, その計算結果が

命題 5. Restriction maps の族

$$H^*(G) \rightarrow H^*(\langle c, a \rangle)^{\text{SL}_2(\mathbb{Z}/3)} \oplus H^*(\langle c, b \rangle)^{S_3} \oplus H^*(\langle c, ab \rangle)^{S_3}$$

は単射である。

この結果から $H^*(G)$ が具体的に書けます。結果を書くと,

定理 6

$$H^*(P) = \mathbb{Z}/3[c] \otimes \left\{ \begin{aligned} &\mathbb{Z}/3[b] \{1, b, b^2, e_1, e_1 b, e_1 b^2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_1 b, \tilde{\alpha}_1 b^2\} \\ &\oplus \mathbb{Z}/3[b] \{b^3, e_3, \alpha_3, \tilde{\alpha}_3\} \oplus \{e_1 \alpha_3\} \oplus \{b \alpha_3 - b^2 \alpha_1\} \\ &\oplus \{\alpha_1 \tilde{\alpha}_3\} \end{aligned} \right.$$

次元は, $|c| = 6$, $|b_1| = |b_3| = |\alpha_1| = |\alpha_3| = 2$, $|\tilde{\alpha}_1| = |\tilde{\alpha}_3| = 3$, $|e_1| = |e_3| = 1$.

このとき命題 3 の生成元は

$$y_{12} = b_1^6 + b_3^6 + c^2, \quad y_8 = b_1 c, \quad x_1 = e_3, \quad y_2 = b_3 + \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_1,$$

$$y_3 = \beta(y_2), \quad y_1 = P'\beta(y_2), \quad \tau_6 = b_3 b_1^3, \quad \gamma_8 = \alpha_3 c, \quad \gamma_1 = \beta(\alpha_3 c) = \tilde{\alpha}_3 c$$

$$\gamma_{11} = \alpha_1 \tilde{\alpha}_3 c, \quad \tau_{12} = b_3^2 b_1^9 \text{ に取れます。尚これから } \tau_6 = x_2^3, \tau_2 = \tau_6^2 = x_2^6$$

となり τ_6, τ_{12} は ring generator としては必要がありません。ここで β は Bockstein operation, P' は Steenrod operation です。

他の文献については前田を見てください。

References

[MKS] Mimura. M Kono. A and N. Shimada Cohomology of classifying spaces of certain associative H-spaces , J. Math. Kyoto univ 15-3(1975) 607-617

[BB] P. F. Baum-W. Brouder The cohomology of quotients of classical groups, Topology, 3(1965), 305-336