

和算に現れた Villarceau circles

近畿数学史学会 直井 功 (Isao Naoi)

東大寺学園 小寺 裕 (Hiroshi Kotera)

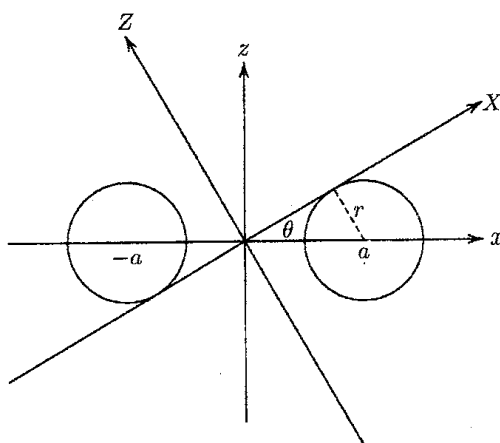
1 Villarceau circles

xyz 座標での torus T の方程式を

$$T : (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2 \dots\dots ①$$

とかく. 下図のように新たな座標系 (X, Y, Z) を導入する.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \dots\dots ②$$



② を ① に代入して

$$(a - \sqrt{(X \cos \theta - Z \sin \theta)^2 + Y^2})^2 + (X \sin \theta + Z \cos \theta)^2 = r^2$$

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2 \{(X \cos \theta - Z \sin \theta)^2 + Y^2\}$$

この torus の XY 平面での切り口を求めるために, $Z = 0$ とおくと

$$(X^2 + Y^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(X^2 \cos^2 \theta + Y^2)$$

$\cos^2 \theta = \frac{a^2 - r^2}{a^2}$ を代入して

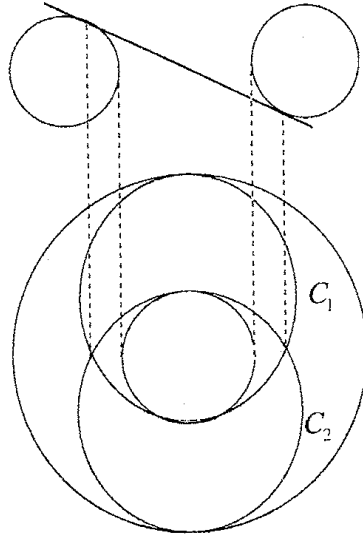
$$(X^2 + Y^2 + r^2 - a^2)^2 - 4r^2 Y^2 = 0$$

$$\{X^2 + (Y - r)^2 - a^2\} \{X^2 + (Y + r)^2 - a^2\} = 0$$

よって, torus T の XY 平面での切り口は次の 2 円 C_1, C_2 となる.

$$C_1: X^2 + (Y - r)^2 = a^2, \quad C_2: X^2 + (Y + r)^2 = a^2$$

この 2 円 C_1, C_2 を Villarceau¹の円 (1848) という.

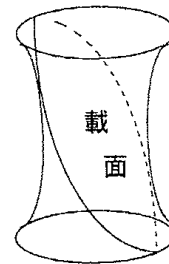


2 算法求積通考

内田久命編「算法求積通考」(1844) 卷之三第 39 問

今有減弧櫛如圖斜截之櫛徑若干高若干問得最少載面積及周術如何

図のような減弧柱 (円柱の側面が円弧になったものでトーラスの孔の部分, 円柱の高さと直径が与えられている) を斜めに切るとき, 断面積の最小値はいくらか.



一對の子午線に内側から接する平面で切断するするとき (断面積が最小で) その切り口が円になることを次のように説明している.

高さを n 等分する. 中径 $= 2r$, 大径 $= 2a$, 小径 $=$ 円柱の直径 とする. (fig.1)

$$\text{中}^2 - \left(\frac{k}{n} \text{高} \right)^2 = (\text{中}_k)^2 \dots \dots \text{①} \quad (QR = \frac{k}{n} \text{高で } \triangle PQR \text{ に勾股弦術})$$

$$\text{大} - \text{中}_k = \text{小}_k \dots \dots \text{②} \quad (PS = \text{大径})$$

$$\text{平}_k = \frac{k}{n} \text{小} = \text{天小} \dots \dots \text{③}$$

¹ Antoine Joseph Francois Yvon Villarceau (1813-1889), *Comptes rendus*, 1848

とする. $小_k^2 - 平_k^2 = 弦_k^2$ (fig.2) だから これに ② ③ を代入して

$$(大 - 中_k)^2 - 天^2 小^2 = 弦_k^2$$

$$大^2 - 2 大 \cdot 中_k + 中_k^2 - 天^2 小^2 = 弦_k^2$$

① を代入して

$$大^2 - 2 大 \cdot 中_k + 中^2 - 天^2 高^2 - 天^2 小^2 = 弦_k^2$$

高^2 + 小^2 = 弦^2 だから

$$大^2 - 2 大 \cdot 中_k + 中^2 - 天^2 弦^2 = 弦_k^2$$

大 : 大_k = 中 : 中_k すなわち 大 · 中_k = 中 · 大_k となるように 大_k を定義すると,

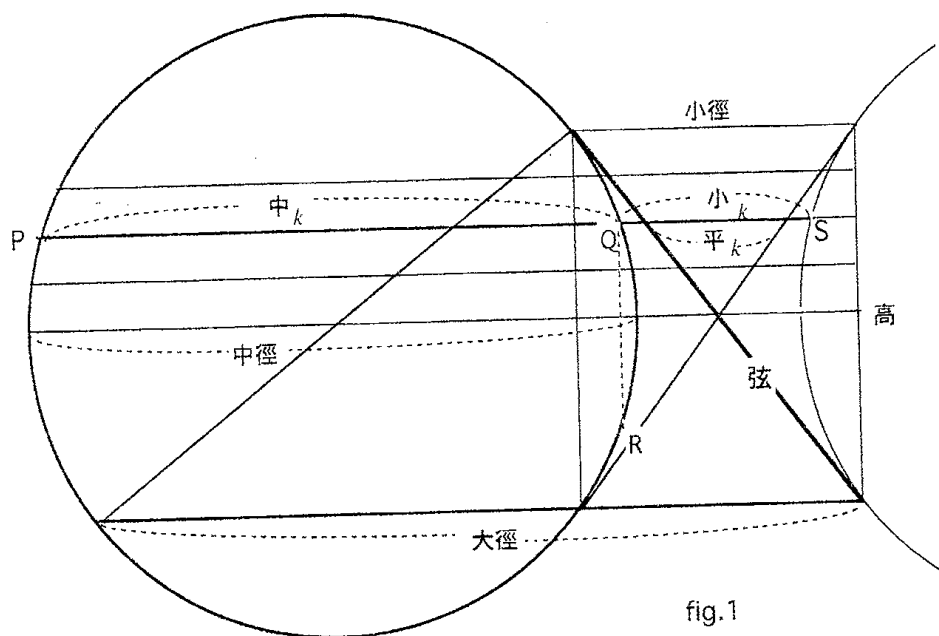
$$大^2 - 2 中 \cdot 大_k + 中^2 - 天^2 弦^2 = 弦_k^2$$

また $大^2 - 天^2 弦^2 = 大_k^2$ だから (∵ fig.3 で $EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} 弦 = \frac{1}{2} 天 弦$, $\triangle F'GH$ に勾股弦術)

$$大_k^2 - 2 中 \cdot 大_k + 中^2 = 弦_k^2$$

$$\therefore 弦_k = 大_k - 中$$

これは 2 矢_k と同じであるので載面半は円弧である. 而してその直径は大径である.



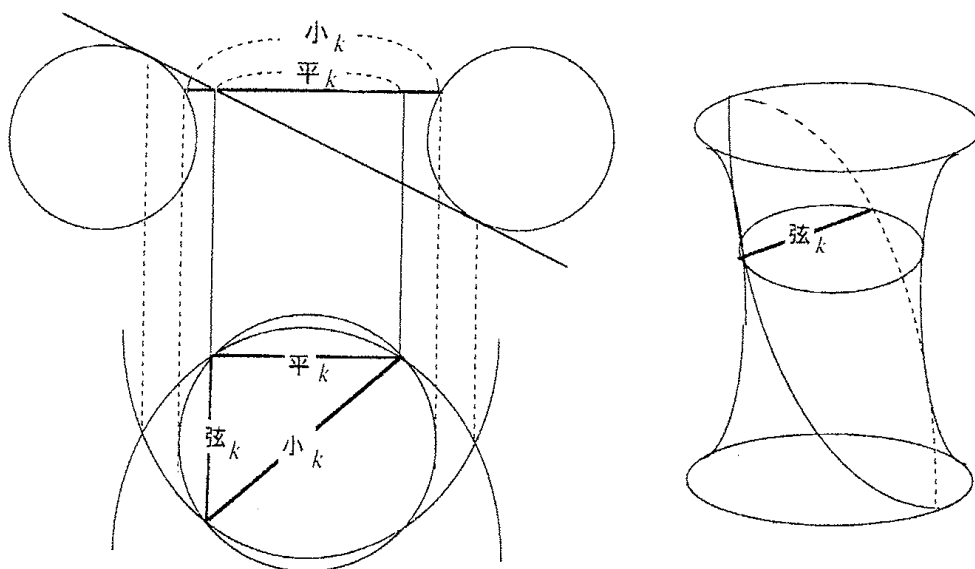


fig.2

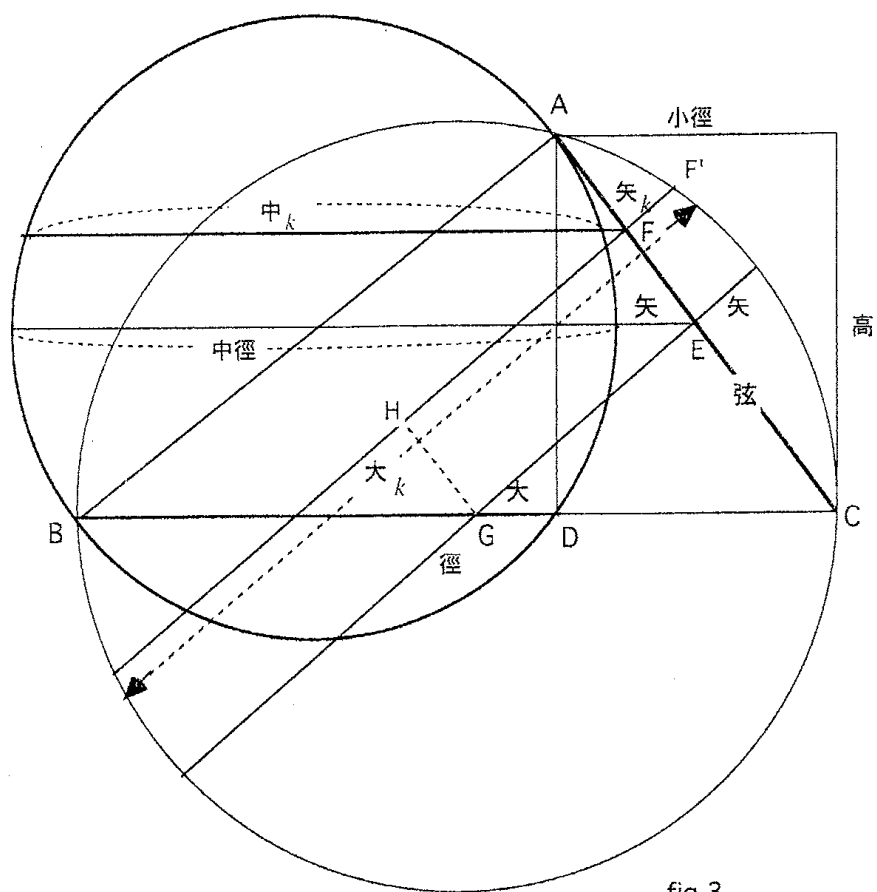


fig.3

3 ルーシェ・コンブルース

ルーシェ・コンブルースの "Traité de Géométrie" (1900) に Villarceau 円の初等的証明がある。

今接平面 AC による切り口の曲線上の点を X とし、この点を過ぎる緯面の半径を UN とすれば $EX = EN$ となる。この接平面を AC を軸に 90° 回転して X が F' に来たとすると $EF' = EN$ である。F' から AE に下ろした垂線の足を M, WN の延長が AE と交わる点を S, E から WS に下ろした垂線の足を T とする。

$\triangle ETS \sim \triangle WAS$, $MN \parallel EW$ より

$$ET : WA = SE : SW = EM : WN = EM : WA$$

$$\therefore ET = EM$$

従って $\triangle EF'M \equiv \triangle ENT$

そこで、 $KE \perp AE$, $KE = WN = r$ となるように K をとると $\angle KEF' = \angle ENW$ だから

$$\triangle KEF' \equiv \triangle ENW$$

$$\therefore KF' = EW = a$$

よって F' は K を中心に半径 a の円を描く。

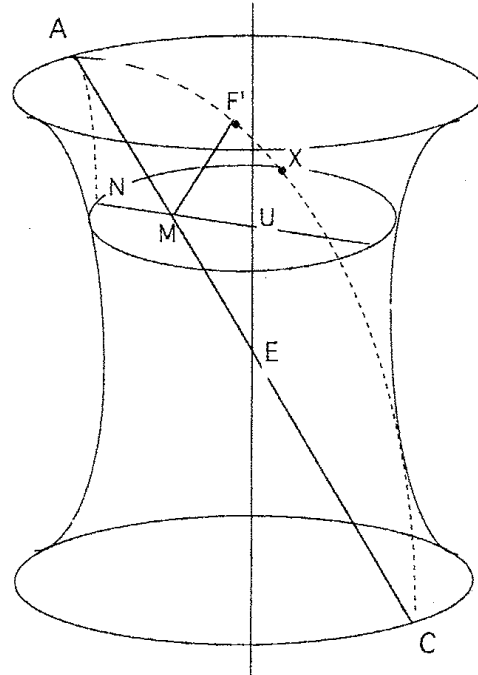


fig.4

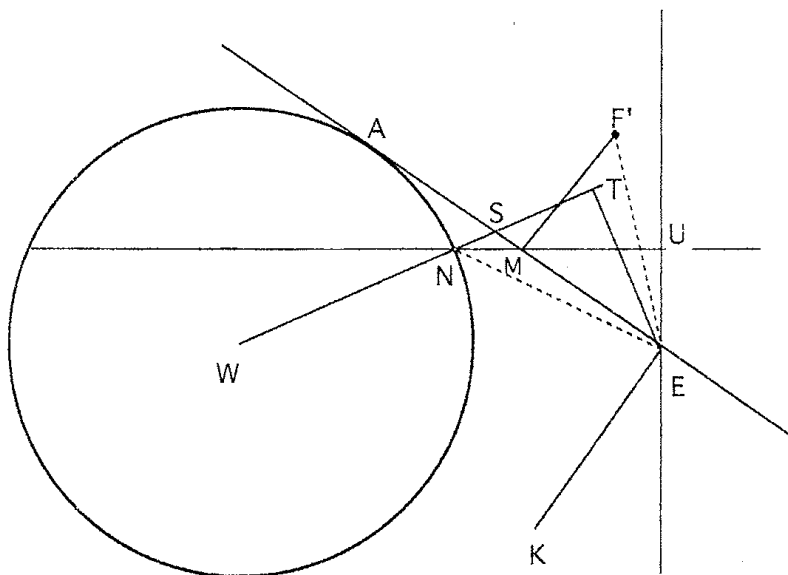


fig.5

4 Villarceau の証明²

xyz 座標での torus T の方程式 ① に 断面の方程式 $z = \alpha x \cdots \cdots$ ② を代入すると

$$\{(1 + \alpha^2)x^2 + y^2 + a^2 - r^2\}^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

これを極座標 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ に変換して,

$$a^2 + \rho^2 + \alpha^2 \rho^2 \cos^2 \varphi - r^2 = 2a\rho$$

$$a^2 + \rho^2 + \alpha^2 \rho^2 - 2a\rho - r^2 = \alpha^2 \rho^2 \sin^2 \varphi$$

② が接平面のときは $\alpha = \tan \theta = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}$ を代入して

$$a^2 - r^2 - \rho a = \pm r \rho \sin \varphi$$

これを直行座標に戻すと

$$a^2 x^2 + (a^2 - r^2)(y \pm r)^2 = a^2(a^2 - r^2)$$

すなわち楕円

$$\frac{x^2}{a^2 - r^2} + \frac{(y \pm r)^2}{a^2} = 1$$

となる. これは求める曲線を xy 平面に projection したものであるから断面上の曲線は円である.

参考文献

- [1] Z.A. Melzak *Invitation to Geometry* 1983 John Wiley & Sons
- [2] M.Berger *Geometry I, II* 1987 Springer-Verlag
- [3] 内田久命編 『算法求積通考』 天保 15 年 (1844) 小寺裕蔵
- [4] ルーシエ・コンプルーヌ, 小倉金之助訳 初等幾何学 1915 山海堂書店
- [5] Y. Villarceau *THEOREME SUR LE TORE* Nouvelles Annales mathematiques 7, 345-347, 1848

²Y. Villarceau[5] による