

Grothendieck 群のノルム写像

北大理学部 丹原大介 (Daisuke Tambara)

L/K が体の有限次分離拡大のとき, L 加群 V の Corestriction とよばれる K 加群 $\text{Cor}_{L/K} V$ がある. 例えば L/K が G をガロア群とするガロア拡大のとき, $\text{Cor}_{L/K} V$ は V の G による共役たちのテンソル積の G で固定される部分である. A が可換 K 代数なる同様に $\text{Cor}_{L/K} : L \otimes A \text{ 加群} \rightarrow A \text{ 加群}$ がある. これは $\otimes$ は保つが $\oplus$ は保たない. しかし (射影加群の) K_0 の間の写像 $K_0(L \otimes A) \rightarrow K_0(A)$ を $L \otimes A$ 加群 V の類 $[V]$ を $[\text{Cor}_{L/K} V]$ にうつすように定義できる. このことの証明とそれに関連することからについて述べる.

§ 1 K_0 の norm map

L/K は体の有限次分離拡大. $\tilde{K}/K$ は L を含む有限次ガロア拡大で, $G = \text{Gal}(\tilde{K}/K)$, $H = \text{Gal}(\tilde{K}/L)$. すると G/H は $\Phi = \text{Hom}_{K\text{-alg}}(L, \tilde{K})$ と同一視される. L 加群 V に対し $\Phi \ni \phi : L \rightarrow \tilde{K}$ による係数拡大 $\tilde{K} \otimes V$ を $\phi_* V$ で表わす.

$G \ni \sigma : R \rightarrow R$ による係数拡大 $R \otimes_R ()$ も $\sigma_*()$ で表わす.

L 加群 V に対して R 上のテンソル積 $\bigotimes_{\sigma \in G} \sigma_* V$ をつくるこゝ, 自然な同型 $\sigma_*(\bigotimes_{\sigma \in G} \sigma_* V) \cong \bigotimes_{\sigma \in G} (\sigma\sigma)_* V \cong \bigotimes_{\sigma \in G} \sigma_* V$ は $\bigotimes_{\sigma \in G} \sigma_* V$ 上に G の semi-linear action をさたゐる. $\Sigma :=$

定義: $\text{Cor}_{L/K} V = (\bigotimes_{\sigma \in G} \sigma_* V)^G$ (G 不変元の全体)

とすると, $\text{Cor}_{L/K} V$ は K 加群で $R \otimes \text{Cor}_{L/K} V \cong \bigotimes_{\sigma \in G} \sigma_* V$.

注1. $f : X \rightarrow Y$ が scheme の etale covering なら X 上の locally free module F に対し, $\text{Cor}_{X/Y} F$ が同様に定義される.

注2. A が L 上の (not neces. commutative) algebra なら

$\text{Cor}_{L/K} A$ は K 上の algebra で, $\text{Cor}_{L/K} : A \text{ 加群} \rightarrow \text{Cor}_{L/K} A \text{ 加群}$ も定義される.

注2'. X が L 上の scheme なら Restriction of scalars $\prod_{L/K} X$ は K 上の scheme で $\text{Cor}_{L/K} : X \text{ 加群} \rightarrow \prod_{L/K} X \text{ 加群}$ が定義される.

これらのそれぞれの場合に, $K_0(X) \rightarrow K_0(Y)$,

$K_0(A) \rightarrow K_0(\text{Cor } A)$, $K_0(X) \rightarrow K_0(\prod_{L/K} X)$ がひきおこされる.

注1 の場合の証明を与える.

一般に Z が有限群 G の作用する scheme のとき有限 G 集合 A に対して $(P(X)^A, G)$ で次のようなものを対象とする圏をあらわす. $\{F_a (a \in A), \varphi_{\sigma, a} (\sigma \in G, a \in A)\}$. ここで

$F_a \in P(Z)$ i.e. Z 上の locally free module, $\varphi_{\sigma, a} : \sigma^* F_{\sigma a} \xrightarrow{\sim} F_a$ s.t. $\varphi_{\sigma, a}$ たちは結合法則をみたす. これは完全圏でその $K_0 = K_0(P(Z)^A, G)$ がある. $Z \rightarrow Y$ が étale Galois covering のときは, $(P(Z)^{\{1 \text{ 点} \}}, G) \simeq P(Y)$, $(P(Z)^G, G) \simeq P(Z)$ で $\text{Cor} : P(Z) \rightarrow P(Y)$ は $\{F_{\sigma}\}_{\sigma \in G} \mapsto \bigotimes_{\sigma \in G} F_{\sigma}$ に対応する. 一般の場合に G 集合の射 $f : A \rightarrow A'$ があれば, $f^* : K_0(P(Z)^{A'}, G) \rightarrow K_0(P(Z)^A, G)$, $f_* : K_0(P(Z)^A, G) \rightarrow K_0(P(Z)^{A'}, G)$ が引きおこされる. さて G 集合系が与えられたとして, $S = 2^{\mathbb{P}} = \{\text{その部分集合}\}$, $S' = \{(U, U') \in S \times S \mid U \cap U' = \emptyset\}$ とおく. G 写像 $j : S' \hookrightarrow S \times S$, $u : S' \rightarrow S$ $(U, U') \mapsto U \cup U'$ がある. $K_0(P(Z)^S, G)$ 上に演算 $\cup$ を

$$\begin{aligned}
 \cup : K_0(P(Z)^S, G) \times K_0(P(Z)^S, G) &\xrightarrow{\boxtimes} K_0(P(Z)^{S \times S}, G) \\
 &\xrightarrow{j^*} K_0(P(Z)^{S'}, G) \xrightarrow{u_*} K_0(P(Z)^S, G)
 \end{aligned}$$

で定義する. また $F = \{F_x\}_{x \in \mathbb{P}} \in (P(Z)^{\mathbb{P}}, G)$ に対して

$\{\bigotimes_{x \in U} F_x\}_{U \subset \mathbb{P}}$ の $K_0(P(Z)^S, G)$ での類を $p(F)$ とおく. 次の二点が示される.

- $+$, $\cup$ に関し $K_0(P(Z)^S, G)$ は graded ring
 - $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ (exact) ならば $p(F) = p(F') \cup p(F'')$
- また $p(F) = 1 + (\text{degree} > 0)$ の形でとくに $K_0(P(Z)^S, G)$ の可逆元.

これで abel 群の準同型 $K_0(P(\mathbb{Z})^{\mathbb{F}}, G) \rightarrow K_0(P(\mathbb{Z})^S, G)^*$ s.t.

$[F] \mapsto \mathcal{P}(F)$ が定まる. $\{\mathbb{F}\} \subset S$ の制限をこれは

$K_0(P(\mathbb{Z})^{\mathbb{F}}, G) \rightarrow K_0(P(\mathbb{Z}), G) \quad [L_{\mathbb{F}}] \mapsto [L_{\mathbb{F}}]$ がえられる.

注 1 の場合, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ を étale Galois として $X = \mathbb{Z}/H$, $H \leq G$,

$\mathbb{F} = G/H$ とすれば, これが $\text{Cor}_{X/\mathbb{Y}} : K_0(X) \rightarrow K_0(\mathbb{Y})$ を与える.

注 4. affine の場合には $K_0(X)$ の relation は直和によるものであり,

このような場合に $\oplus$ を保たないある種の関手 K_0 上の

operation に拡張する方法として, Dress の多項式写像の方法がある.

これは有限群の表現環上で乗法的 induction を定義するのに使われた ([2]) .

上のやり方は relation が完全列による場合にも使えるので, [2] で使われた relative な表現環

上で乗法的 induction を定義することができる.

注 5. $\mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ が n 次の étale covering で $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ は体上の non-

singular variety とする. $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ の K_0 は coherent sheaf の K_0 と

同一視され, $\text{Fil}^k K_0$ を $\text{codim Supp } F \geq k$ なる coherent F の類で生成される K_0 の部分群とする.

norm map $K_0(\mathbb{Y}) \rightarrow K_0(\mathbb{Z})$ は

$\text{Fil}^k K_0(\mathbb{Y})$ を $\text{Fil}^{kn} K_0(\mathbb{Z})$ にうつす. また rational equivalence

ring についても norm map $A^k(\mathbb{Y}) \rightarrow A^{kn}(\mathbb{Z})$ が定義できる

注 6. L/K が n 次 の ガロア 拡大 の とき , 写像 $K_{2n}(L) \rightarrow K_{2n}(K)$ で $K_{2n}(K) \rightarrow K_{2n}(L)$ を 合成 する $x \mapsto \prod_{\sigma \in G} x^{\sigma}$ と なる も の は あ る か ?

§ 2. Mackey λ -ring

vector bundle の exterior power $F \mapsto \wedge^i F$ は $K_0(X)$ 上 の operation $\lambda^i : [F] \mapsto [\wedge^i F]$ を ひ き お こ す . λ^i た ち の $K_0(X)$ へ の 作 用 の 仕 方 を 押 象 化 し て operation の 環 $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots]$ を 考 え $\mathcal{U}$ が 同 じ よ う な 仕 方 で 作 用 す る 環 を λ -ring と い う . $\mathcal{U}$ は い る い る な 構 造 を も ち , 任 意 の 可 換 環 S に 対 し て $\text{Hom}_{\text{ring}}(\mathcal{U}, S)$ は 可 換 環 に な る . $\mathcal{U}$ ま た は $\text{Hom}_{\text{ring}}(\mathcal{U}, -)$ は universal ring と よ ば れ る . $X \rightarrow Y$ が G を ガロア 群 と す る etale covering の とき , 各 部 分 群 $H \leq G$ ご と に operation $\lambda^i : K_0(X/H) \rightarrow K_0(X/H)$ が あ る が , こ の 他 に $H \leq H' \leq G$ の とき , pull back $K_0(X/H') \rightarrow K_0(X/H)$, trace $K_0(X/H) \rightarrow K_0(X/H')$, norm $K_0(X/H) \rightarrow K_0(X/H')$, H の 基 礎 体 K 上 の 指 標 環 $R(H)$ の 作 用 $R(H) \otimes K_0(X/H) \rightarrow K_0(X/H)$ が あ る . こ れ ら の operation た ち が universal ring に 相 当 す る も の を 定 義 す る . 以 下 有 限 群 G と 体 K を 固 定 す る .

定 義 : M が Mackey functor と は 有 限 G 集 合 A に 対 し abel 群 $M(A)$ が 対 応 し , G -map $f : A \rightarrow A'$ に 対 し 2 つ の 導 同 型 $f^* : M(A') \rightarrow M(A)$, $f_* : M(A) \rightarrow M(A')$ が 対 応 し , 次 を み た す こ

とをいう。

(i) $f \mapsto f^*$, $f \mapsto f_*$ は関手。

(ii) M は直和をたもつ。

$$(iii) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ A' & \xrightarrow{h'} & B' \end{array}$$

が pull back diagram ならば $g^* h'_* = h_* f^*$ 。

G 集合 G/H に対し $K[H]$ の Gro. group を $R(G/H)$ とし Mackey functor $R: G/H \mapsto R(G/H)$ がえられる。以下 R はこれを用いる。2つの Mackey functor M, N から Mackey functor $M \otimes N$ をつくれるので, Mackey functor としての ring (R はそう), R -algebra が自然に定義される。可換な R -algebraのみ考える。 R -algebras から R -algebras Λ のなる関手 Λ と自然変換 $w: \Lambda \rightarrow \Lambda \circ \Lambda$ が定義され, これは Mackey λ -ring とは R -algebra S での可換性をみたす R -algebra homomorphism $\lambda: S \rightarrow \Lambda(S)$ のあたえられたものをいう。

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\lambda} & \Lambda(S) \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \Lambda(\lambda) \\ \Lambda(S) & \xrightarrow{w(S)} & \Lambda \circ \Lambda(S) \end{array}$$

普通の λ -ring では $\Lambda(S) = \text{Hom}_{\text{ring}}(u, S) = 1 + S[[t]]^+$ である。

(初項が1の形式中級数の環) Λ, w の定義は講演で詳

λ の値は $\Lambda(S)$ の G 集合 A での値はある Mackey functor
 $(R\text{-algebra}) u_A$ により $\Lambda(S)(A) = \text{Hom}_{R\text{-alg}}(u_A, S)$ と表現され
 る. u_A が universal ring に相当するもので、大ざっぱに言っ
 て $(\underbrace{GL \times \dots \times GL}_{\#A}) \times G$ の多項式表現の Grothendieck 環からえら
 れる. X が G の作用する K 上の scheme のとき, $G/H \mapsto$
 $K_0(\{X \text{ 上の } H\text{-bundle}\})$ は Mackey λ -ring になる. これはこの
 section のはじめにあげた operation たちの formal な関係をひと
 まとめに表わしている.

§3. Polynomial functors

§2 のはじめにのべた operations の K_0 への作用は polynomial
 functor の X 上の module への作用からきている. $u =$
 $\mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \dots]$ は K 加群から K 加群への polynomial functors の Gro.
 ring であるが, 我々の場合は, 体拡大 L/K に対して L 加群から
 K 加群への K 上の polynomial functors を考えることになる.
 ([3] では K が標数 0 の bodies のとき K 上有限次の algebra A
 上の射影加群の圏から K 加群の圏への polynomial functor があつ
 かわれている) D が K 上有限次の斜体で中心が K 上分離
 的のとき, D 加群から K 加群への K 上の polynomial functors
 の Gro. ring が求まるが複雑な形をしている.

REFERENCES

1. P. Berthelot, Généralités sur les λ -Anneaux, SGA 6
2. A.W.M. Dress, Operations in representation rings, Proc. Symposia in Pure Math. XXI (1971)
3. I.G. Macdonald, Polynomial functors and wreath products, Journal of Pure and Applied Algebra 18 (1980)