

変数係数偏微分方程式の解の存在と
解析性 (2変数1階作用素の場合)

東京教育大 理 鈴木文夫

§ 1. 序

2変数1階の微分作用素

$$P = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y)$$

において, 係数 a, b, c は (x, y) -平面の開集合 Ω で定義された複素数値実解析関数で

$$|a(x, y)| + |b(x, y)| \neq 0$$

とする. P の主部を p , $\bar{p} = \bar{a}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \bar{b}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ とする.

p の高次の交換子を次のように定義する:

$$c_p^0 = \bar{p},$$

$$c_p^k = [p, c_p^{k-1}] = p c_p^{k-1} - c_p^{k-1} p.$$

Ω の各点 (x, y) において, c_p^k の係数の作る2次元ベクトルが p の係数の作るベクトルのスカラー倍でなくなる最初の k の値を $k_p(x, y)$ と書く. 但しすべての k について c_p^k が p のスカラー倍となっていないときは $k_p(x, y) = \infty$ とする. 特に

$k_p(x, y) = 0$ ならば, P は (x, y) において楕円型である.

$k_p(x, y)$ の偶奇性と微分方程式 $Pu = f$ の解の存在および解析性との関係について次の2つの定理が成り立つ.

定理 A (解の解析性) 次の2条件は同値である.

(a) $\forall$ 開集合 $\omega \subset \Omega$; $u \in B(\omega), Pu \in A(\omega) \Rightarrow u \in A(\omega)$.

(A) $\forall (x, y) \in \Omega$, $k_p(x, y) = \text{偶数}$

定理 B (局所解の存在) 次の2条件は同値である.

(b) $\forall (x, y) \in \Omega$, $\exists \omega: (x, y)$ の近傍; $PB(\omega) = B(\omega)$.

(B) $\forall (x, y) \in \Omega$, $k_p(x, y) = \text{偶数}$ 或は ∞ .

解の解析性については, 楕円型の場合は任意の階数および変数の個数の変数係数微分作用素について証明されているが [3], ここでは楕円型でないものについても考えている. 例へば, 溝畑 [1] の例 $\frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial y}$ においては,
 $k_p(x, y) = k \quad (x=0), = 0 \quad (x \neq 0)$ であるから, k が偶数のとき条件 (A) が成り立つ.

局所解の存在については, Schapira [4] が $(\frac{\partial}{\partial x} + ix \frac{\partial}{\partial y})u = f$ について, f を適当に取れば, hyperfunction の範囲でも解が存在しないことを示した. 後に Schapira [5], [6] は変数の個数が任意の1階微分作用素について, Nirenberg - Treves [2] の条件 (P') " c_p^k が p と $\bar{p}$ の1次結合でなくなる最初の k の値が偶数或は ∞ " が hyperfunction 局所解

の存在のための必要十分条件であることを証明した。2変数の場合には (P') は (B) と同値である。Schapira の証明はアプリアリ不等式によるものであるが、ここでは複素領域における特性曲線の性質を調べて証明する。

§2. 複素領域における特性曲線

以下 x, y は複素変数とし、係数 a, b, c は Ω の複素近傍で定義された複素変数 x, y の解析函数に拡張しておく。

係数 a, b が複素数値の函数であっても、複素領域においては ρ の特性曲線を定義することができるが、条件 (A), (B) は、2変数の場合には、特性曲線の次のような性質と同値である。

定理 1. Ω において (A) が成り立つための必要十分条件は、

(α) Ω の各点の近傍で、各特性曲線上の実点は高々1つである。

Ω において (B) が成り立つための必要十分条件は、

(β) Ω の各点の近傍で、各特性曲線は i) その上に高々1つの実点しか持たないか、或は、ii) 実曲線になる。

証明 Ω の各点の近傍で新しい実座標系を導入して、

$$\rho = a'(x, y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i b'(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$a'(x, y) \neq 0$, $b'(x, y)$ は実数値函数とすることができる [2].

条件 (A), (B), (α), (β) は実座標変換に関して不変であるから, $\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial x} + i b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$, $b(x, y)$ 実数値函数, の場合に証明すればよい. この形の作用素 $\mathcal{P}$ については

$$(2.1) \quad k_p(x, y) = \min \{ k \mid \frac{\partial^k b(x, y)}{\partial x^k} \neq 0 \}$$

である [7]. 従って $\frac{dy}{dx} = i b(x, y)$ の解曲線 $y = \varphi(x)$ 上の実点 (x, y) において

$$(2.2) \quad k_p(x, y) = \min \{ k \mid \operatorname{Im} \varphi^{(k+1)}(x) \neq 0 \}$$

かつ

$$(2.3) \quad \operatorname{Im} \varphi^{(k_p+1)}(x) = \frac{\partial^{k_p} b(x, y)}{\partial x^{k_p}}$$

である.

(A) $\Rightarrow$ (α) 条件 (A) が成り立つとき, (2.1) より, Ω において $b(x, y)$ の符号は変らない. 従って $\frac{\partial^{k_p} b(x, y)}{\partial x^{k_p}}$ の符号も変らない. 或特性曲線 $y = \varphi(x)$ 上に2つ以上の実点があったとする. x が実数のとき, (2.2) より $\operatorname{Im} \varphi(x)$ の零点の次数は奇数 $k_p + 1$ であるから, $\operatorname{Im} \varphi(x)$ の隣り合う零点において, $\operatorname{Im} \varphi^{(k_p+1)}(x)$ の符号が変わる. これは (2.3) に反する.

(B) $\Rightarrow$ (β) Ω において条件 (B) が成り立つとする. $k_p(x, y)$ は上半連続だから, $k_p(x_0, y_0) < \infty$ となる点 (x_0, y_0) の近傍では (A) が成り立つ. 従って $k_p(x_0, y_0) = \infty$ となる点 (x_0, y_0) の近傍で考えればよい. $(x_0, y_0) = (0, 0)$ と仮定してよい.

$b(x, y)$ は解析函数だから, (2.1) より, y を固定すると,
 $b(x, y)$ は x に関して定符号, 特に $b(x, 0) \equiv 0$ である.
 従って, 原点の十分小さい近傍 ω を取れば, $\omega^+ = \omega \cap \{y > 0\}$,
 $\omega^- = \omega \cap \{y < 0\}$ の各々において $b(x, y)$ は定符号となる.

ω 全体で $b(x, y)$ が定符号の場合は, (A) $\Rightarrow$ (B) の証明と
 同様にして, 実曲線でない特性曲線上には高々 1 つの実点し
 かない.

ω^+ と ω^- とで $b(x, y)$ の符号の異なる場合を考えよう.

$b(x, 0) \equiv 0$ であるから, $\exists C > 0$,

$$(2.4) \quad |b(x, y)| \leq C|y|.$$

また, 原点を通る特性曲線 $y = 0$ を除けば, 各特性曲線
 $y = \varphi(x)$ 上で $\varphi(x) \neq 0$ である. (2.4) より

$$(2.5) \quad |\arg \varphi(x_2) - \arg \varphi(x_1)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx \right| \leq C|x_2 - x_1|.$$

特性曲線 $y = \varphi(x)$ が実曲線でないければ, $\operatorname{Im} \varphi(x)$ の隣り合
 う実零点 x_1, x_2 において, $\frac{\partial^{k_p} b(x, y)}{\partial x^{k_p}} = \operatorname{Im} \varphi^{(k_p+1)}(x)$ は異
 符号である. 従って, $\varphi(x_1)$ と $\varphi(x_2)$ は異符号である. (2.5)
 より, $\pi \leq C|x_2 - x_1|$ となるから, 直径が π/C より小さ
 い近傍を取れば, 実曲線でない特性曲線上には高々 1 つの実
 点しかない.

(B) $\Rightarrow$ (B) 条件 (B) が成り立たないとき, $k_p(x_0, y_0)$ が

奇数となる点 (x_0, y_0) が存在する. $(x_0, y_0) = (0, 0)$ と仮定して
 よい. $y = \varphi(x, a) \in \frac{dy}{dx} = i\alpha(x, y)$ の解で, $\varphi(0, a) = ia$
 となるものとする. $\varphi(x, 0) = i\beta x^{k+1} + \dots$, $k = k_p(0, 0)$,
 $\beta = \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} \alpha(0, 0)}{\partial x^{k+1}}$, であるから, x, a が実数のとき,
 $\operatorname{Im} \varphi(x, a) = (1 + o(1))a + (\beta + o(1))x^{k+1}$.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, x, a が十分小さいとき,

$$|\operatorname{Im} \varphi(x, a) - a - \beta x^{k+1}| \leq \varepsilon (|a| + |x|^{k+1}).$$

従って, a が十分小さくかつ $\beta a < 0$ のとき, 特性曲線

$y = \varphi(x, a)$ 上には少なくとも2つの実点があり, しかも実曲線ではない.

(α) $\Rightarrow$ (A) 条件 (A) が成り立たないとき, $k_p(x_0, y_0) =$
 奇数, 或は ∞ となる点が存在する. $k_p(x_0, y_0) = \infty$ の場合
 には, (x_0, y_0) を通る特性曲線は実曲線になる. 従って, い
 ずれの場合にも, 2つ以上の実点を持つ特性曲線が存在する.

§ 3. 補題

Cauchy-Kowalewsky の定理により, 各点の近傍において,
 $p_h + c = 0$ の解析的な解 u が存在する. 未知函数の変換
 $u = v e^h$ により, $Pu = f$ は $p v = e^{-h} f$ となる. 従っ
 て, 定理 A, B は低階の項を持たない微分作用素 p につい
 て証明すればよい. 更に, 定理 A については, Cauchy-

Kowalewsky の定理により, 局所的には $pu = e^{-hf}$ の解析的な解 v_0 が存在するから, v の代りに $v - v_0$ を考えれば,

$$(a_0) \quad \forall \omega \subset \Omega; \quad u \in B(\omega), \quad pu = 0 \Rightarrow u \in A(\omega)$$

と (A) とが同値であることを示せばよい.

定理 1 に述べた特性曲線の性質と解の解析性および存在との関係は hyperfunction の定義函数の定義域と特性曲線との交わりを調へることにより証明される.

まず $y = \text{const}$ が $\text{Re } p$ に関して non-characteristic になるように実座標変換 $x' = x, y' = x + y$ を行なう. 新しい座標系では

$$p = \frac{\partial}{\partial x} + (1 + i\varphi(x, y-x)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

特性曲線の方程式は $y = \varphi(x, a) = x + \varphi(x, a)$.

$\varphi(x, a)$ の定義域 U を十分小さく取って, 対応 $(x, a) \rightarrow (x, y)$ が U から開集合 V の上への 1 対 1 写像でかつ逆も解析的になるようにする. U の形は任意に取れるから, 例へば複素平面上の長方形 X と A との積 $X \times A$ とすれば, U と V は Stein になる.

$$V_1 = \{(x, y) \in V \mid \text{Im } x \neq 0\}, \quad V_2 = \{(x, y) \in V \mid \text{Im } y \neq 0\},$$

$$V_1^\pm = \{(x, y) \in V \mid \text{Im } x \gtrless 0\}, \quad V_2^\pm = \{(x, y) \in V \mid \text{Im } y \gtrless 0\},$$

$$V^{(\sigma)} = \{(x, y) \in V \mid (\text{Im } x, \text{Im } y) \in \text{第 } \sigma \text{ 象限}\}, \quad \sigma = 1, 2, 3, 4,$$

$$\text{とすれば, } B(\omega) = \mathcal{O}(V_1 \cap V_2) / (\mathcal{O}(V_1) + \mathcal{O}(V_2)), \quad \omega = V \cap \mathbb{R}^2,$$

である。

特性曲線が $V_i^\pm (i=1, 2)$, $V^{(\sigma)} (\sigma=1, 2, 3, 4)$ とどのような形で交わるかを調べよう。複素座標変換 $(x, y) \leftrightarrow (x, a)$ によって、次のように対応する：

$\begin{aligned} & \phi u(x, y) = f(x, y) \\ & V, V_i, V_i^\pm, V^{(\sigma)} \\ & \text{特性曲線 } C_a: y = \psi(x, a), x \in X \\ & C_a \cap V_i^\pm, C_a \cap V^{(\sigma)} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} v(x, a) = g(x, a) \\ & U, U_i, U_i^\pm, U^{(\sigma)} \\ & U(a) = \{x \mid (x, a) \in U\} = X \\ & U_i^\pm(a), U^{(\sigma)}(a) \end{aligned}$
---	---

特性曲線 C_a と $V_i^\pm, V^{(\sigma)}$ との交わりに対応する $U_i^\pm(a), U^{(\sigma)}(a)$ の形がどのようなかを調べよう。

x -平面上の曲線 $\text{Im } \psi(x, a) = 0$

(a : 固定) を境に $\text{Im } \psi$ の符号が変る。 $x=0, a=0$ において

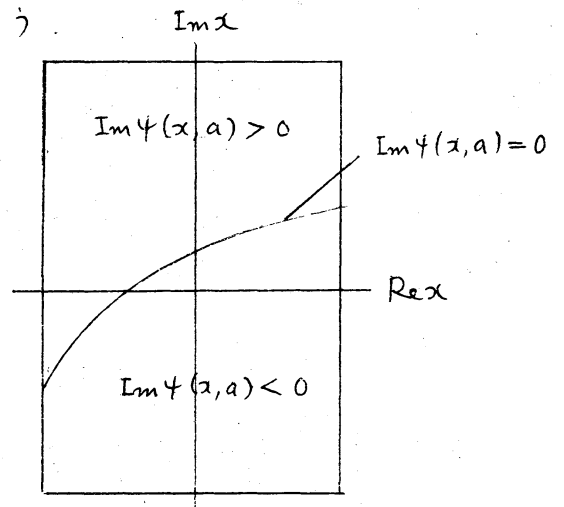
$$\partial \text{Im } \psi(x' + ix'', a) / \partial x'' = 1$$

であるから、 X, A を十分小さく

取れば、 $\text{Im } \psi(x' + ix'', a) = 0$ は

$x'' = \xi(x', a)$ と解ける。従って $U_1^\pm(a) = \{x \in X \mid x'' \gtrless 0\}$

及び $U_2^\pm(a) = \{x \in X \mid x'' \gtrless \xi(x', a)\}$ は単連結である。



補題 1. 複素 (x, a) -空間の開集合 G の $a = \text{const}$ による断面 $G(a)$ がすべて単連結なうば、 $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{O}(G) = \mathcal{O}(G)$ 。

証明。射影 $(x, a) \rightarrow a \in \pi_a$ と書こう。 $\pi_a(G)$ の開被

$\{N_i\}$ について $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{O}(G_i) = \mathcal{O}(G_i)$, $G_i = G \cap \pi_a^{-1}(N_i)$, とする
 ものが存在する. $\forall g \in \mathcal{O}(G)$, $\exists v_i \in \mathcal{O}(G_i)$, $\frac{\partial}{\partial x} v_i = g$.
 $\frac{\partial}{\partial x} (v_i - v_j) = 0$ から $G(a)$ は連結だから $v_i(x, a) - v_j(x, a)$
 は a だけの関数 $w_{ij}(a)$ である. 複素平面上の任意の開集合
 N について $H^1(N, \mathcal{O}) = 0$ であるから, $\exists w_i(a) \in \mathcal{O}(N_i)$,
 $w_{ij}(a) = w_i(a) - w_j(a)$, $a \in N_i \cap N_j$. 従って, $\exists v(x, a)$
 $\in \mathcal{O}(G)$, $v(x, a) = v_i(x, a) - w_i(a)$, $(x, a) \in G_i$.
 $\frac{\partial}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial x} v_i = g$ とする. $Q \in D$.

この補題 1 により, $p\mathcal{O}(V_i) = \mathcal{O}(V_i)$, $i=1, 2$, とする.

補題 2 V は Stein, から $p\mathcal{O}(V_i) = \mathcal{O}(V_i)$, $i=1, 2$,

$\omega = V \cap \mathbb{R}^2$ とする. 次の 2 条件は同値である.

$$(a)_\omega \quad u \in B(\omega), \quad pu = 0 \Rightarrow u \in A(\omega).$$

$$(\tilde{a})_\omega \quad \forall \sigma; \quad u^{(\sigma)} \in \mathcal{O}(V^{(\sigma)}), \quad pu^{(\sigma)} = 0 \Rightarrow u^{(\sigma)} \text{ は } \omega \text{ の}$$

複素近傍上で解析接続できる.

次の 2 条件は同値である.

$$(b)_\omega \quad pB(\omega) = B(\omega).$$

$$(\tilde{b})_\omega \quad \forall \sigma; \quad p\mathcal{O}(V^{(\sigma)}) = \mathcal{O}(V^{(\sigma)})$$

証明. $(\tilde{a})_\omega \Rightarrow (a)_\omega$ $u \in B(\omega)$ の 1 つの定義関数 ε
 $u^{(\sigma)} \in \mathcal{O}(V^{(\sigma)})$ とする. $pu = 0$ より, $\exists e_i \in \mathcal{O}(V_i)$,
 $pu^{(\sigma)} = e_1 + e_2$. 仮定より, $\exists u_i \in \mathcal{O}(V_i)$, $pu_i = e_i$.
 従って, $p(u^{(\sigma)} - u_1 - u_2) = 0$. $u^{(\sigma)} - u_1 - u_2$ は ω の

複素近傍まで解析接続できる、故に $u \in A(\omega)$.

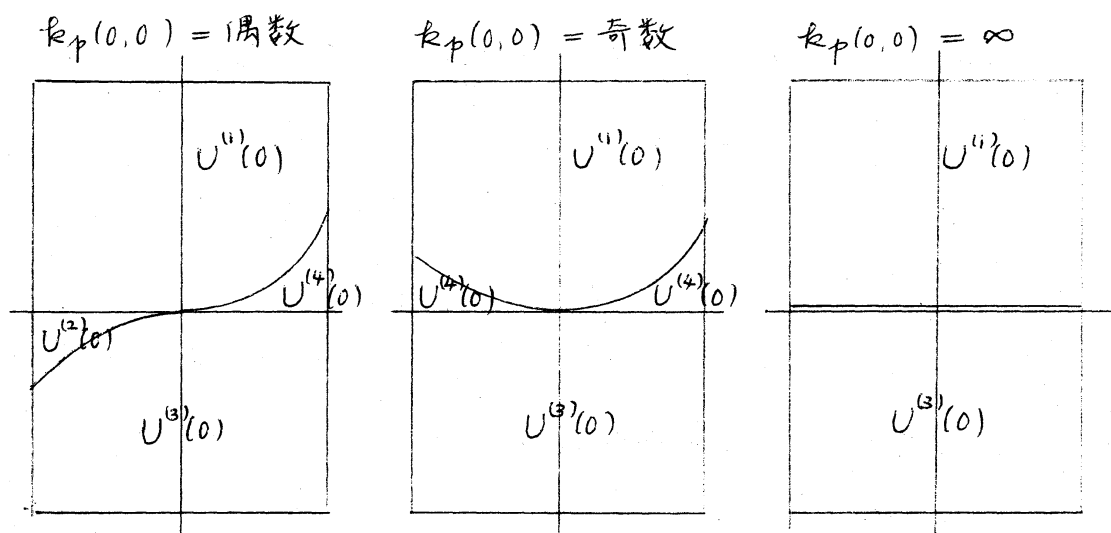
逆 $(a_0)_\omega \Rightarrow (\tilde{a}_0)_\omega$ は明らか、また、 $(b)_\omega \Leftrightarrow (\tilde{b})_\omega$ も同様に証明できる。

§4. 定理 A の証明

原点を通る特性曲線 $C_0: y = \psi(x, 0)$ について、

$$k_p(0, 0) = \min \{ k \mid \operatorname{Im} \frac{\partial^{k+1} \psi(0, 0)}{\partial x^{k+1}} \neq 0 \}$$

であるから、 $k_p(0, 0)$ の値により次の 3 つの場合が起る。



従って、 $k_p(0, 0) = \text{偶数}$ のとき、そのとき限り、 $\forall \sigma$, $U^{(\sigma)}(0) \neq \emptyset$.

$k_p(0, 0) = \text{偶数}$ の場合、各 $V^{(\sigma)}$ から特性曲線 C_0 に沿って原点まで到達できるから、解は原点まで解析接続できる。

$k_p(0, 0) = \text{奇数}$ 、或は ∞ の場合、原点を通る特性曲線は少くとも一つの $V^{(\sigma)}$ と交わらない。 $\Psi(x, y)$ を特性方程式

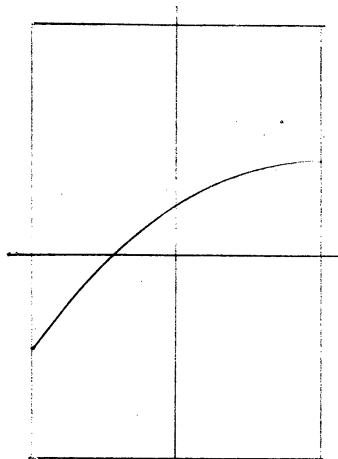
$\Psi = 0$ の解で, $\Psi(0,0) = 0$, $\text{grad } \Psi(0,0) \neq 0$ とする.

$C_0 = \{(x,y) \mid \Psi(x,y) = 0\}$ だから, 十分小さい原点の近傍で, ある象限において $\Psi(x,y) \neq 0$ とする. $\alpha \neq$ 整数のとき, $\Psi^\alpha = 0$ であるが, Ψ^α は原点まで解析接続できない.

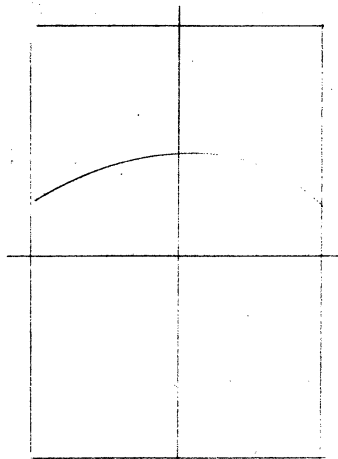
§ 5 定理 B の証明

解の存在の証明においては, 原点の近傍を通るすべての特性曲線について考えなければならない. 特性曲線上の実点は x 平面上の曲線 $\text{Im } \Psi = 0$ と $\text{Re } x$ 軸との交点に対応する点. だから, 条件 (B) が成り立つときには, 定理 1 により, 次の 3 つの場合しか起らない.

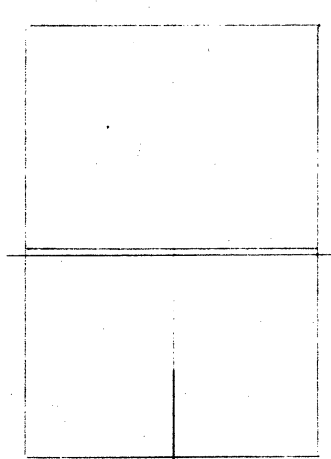
実点が 1 つの場合



実点がない場合



実曲線の場合



いずれの場合にも, $\forall a \in A$, $U^{(\sigma)}(a)$ ($\sigma = 1, 2, 3, 4$) は単連結, 或は空集合である. 従って, § 3 の補題 1, 2 により, (B) が証明される.

条件 (B) が成り立たないとき, $k_p(x_0, y_0) = \text{奇数}$ とする点 (x_0, y_0) が存在する. $(x_0, y_0) = (0, 0)$ と仮定してよい.

$x = x' + ix'' = 0$, $a = 0$ のとき,

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \psi(x' + ix'', a)}{\partial x''} = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j \operatorname{Im} \psi(x' + ix'', a)}{\partial x'^j} &= 0, & j &= 0, 1, \dots, k_p(0, 0), \\ &= \beta, & j &= k_p(0, 0) + 1. \end{aligned}$$

従って, a が実数のとき,

$$\xi(0, a) = -a + \dots,$$

$$\xi(x', 0) = -\beta x'^{k+1} + \dots,$$

但し $k = k_p(0, 0)$.

$$\xi(x', a) = -(1 + o(1))a - (\beta + o(1))x'^{k+1}.$$

従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, x', a が十分小さいとき,

$$(5.1) \quad |\xi(x', a) + a + \beta x'^{k+1}| \leq \varepsilon(|a| + |x'|^{k+1}).$$

$\beta > 0$ の場合を考えよう. 曲線 $\operatorname{Im} \psi = 0$ は, a の値により, 右の図のように動く. (5.1) より, ($\beta > 0$ の場合)

$$a \leq 0 \text{ のとき, } U^{(2)}(a) \supset W(a)$$

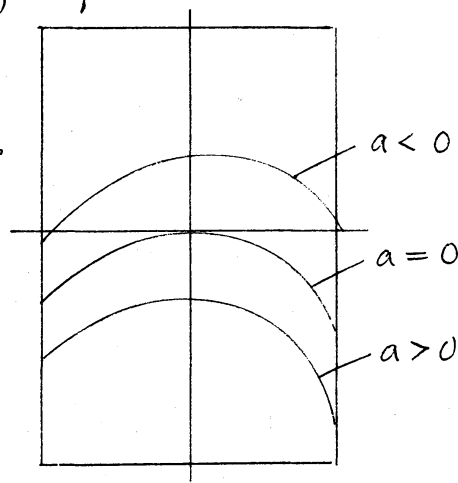
$$\stackrel{\text{def}}{=} \{x' \mid -(1+\varepsilon)a - (\beta-\varepsilon)x'^{k+1} < x'' < 0\}.$$

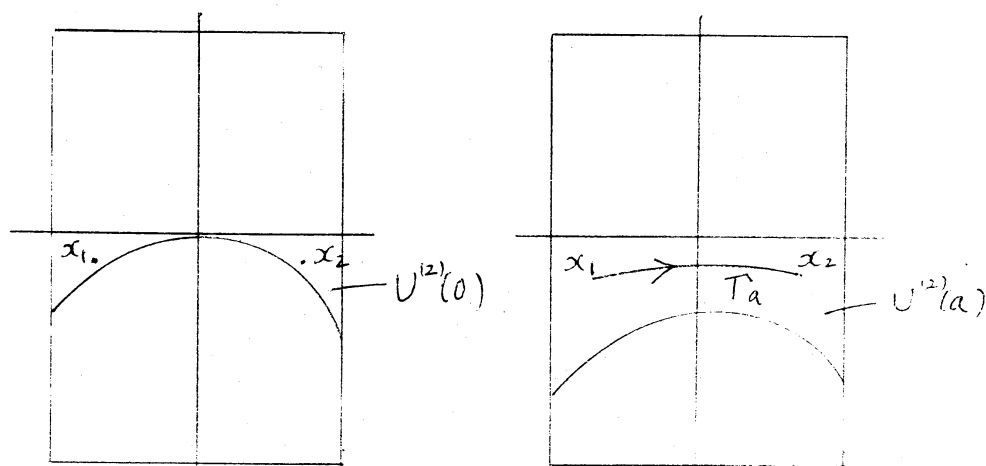
$W(0)$ の中に下の図のように

2点 x_1, x_2 を取り, $a < 0$ の

とき, x_1 と $x_2 \in W(a)$ 内の

曲線 Γ_a で結ぶ.





$f(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \frac{1}{xy}$ (δ 函数の定義函数), $g(x, a) = \frac{1}{x\psi(x, a)}$ に対して, $\frac{\partial}{\partial x} v = g$ となる $v(x, a) \in \mathcal{O}(U^{(2)})$ は存在しないことを示そう. このような v が存在したと仮定すると, $a \uparrow 0$ のとき,

$$\int_{T_a} g(x, a) dx = v(x_2, a) - v(x_1, a) \longrightarrow v(x_2, 0) - v(x_1, 0).$$

他方, $g(x, a) = \frac{1}{a} \frac{1}{x} + g_0(x, a)$, $g_0(x, a)$ は $x=0$ で正則, であるから,

$$\int_{T_a} g(x, a) dx = \frac{1}{a} \int_{T_a} \frac{1}{x} dx + \int_{T_a} g_0(x, a) dx.$$

第1項の積分は a の値によらない定数 $\neq 0$ である. 第2項は, $a \uparrow 0$ のとき, 有限の値に収束する. したがって矛盾が生じる.

参考文献

- [1] Mizohata, S., Solutions nulles et solutions non analytiques.
J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962) 271-302
- [2] Nirenberg, L. & Treves, F., Solvability of a first order linear partial differential equation.
Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 331-351.
- [3] 佐藤幹夫, 層 C と微分方程式の解の正則性
数理解析研シンポジウム
「佐藤の超函数論とその周辺」
- [4] Schapira, P., Une équation aux dérivées partielles sans solutions dans l'espace des hyperfonctions.
C.R. Acad. Sci. Paris 265 (1967) Ser. A 665-667.
- [5] Schapira, P., Equations aux dérivées partielles dans l'espace des hyperfonctions.
Séminaire P. Lelong 1967/68, 38-45
- [6] Schapira, P., Solutions hyperfonctions des équations aux dérivées partielles du premier ordre
Séminaire Lions-Schwartz
- [7] Suzuki, H., Analytic-hypoelliptic differential operators of first order in two independent variables.