

関数空間における線型等長写像について

山形大理 岡安 隆照 (Takateru Okayasu)

山形大理 高垣真理子 (Mariko Takagaki)

§1 X, Y を compact Hausdorff space, $C(X), C(Y)$ をそれぞれ X, Y 上の実数値, あるいは複素数値, 連続関数の全体が $\sup$ norm の下で作る Banach 環とする (以下とも). よく知られているように, $C(X)$ と $C(Y)$ が環同型であることと, X と Y が同相であることは同値である (Gelfand-Kolmogorov).

$C(X)$ と $C(Y)$ が等長線型同型であることもまた, X と Y が同相であることと同値である (Banach-Stone).

定理 1 T が $C(X)$ から $C(Y)$ の上への線型等長写像ならば, Y から X への同相写像と絶対値 1 の Y 上の連続関数 w が存在して

$$(Tf)(y) = w(y)f(h(y)), \quad f \in C(X), y \in Y$$

が成り立つ.

このように上への線型等長写像の構造は明瞭である。

中への線型等長写像については下記の定理が知られているのみである：

定理 2 (Holsztyński [6]) T が $C(X)$ から $C(Y)$ への線型等長写像ならば、条件

$$(*) \quad f \in C(X), \|f\| = |f(x)| = 1 \text{ ならば } |(Tf)(y)| = 1$$

を満たす Y の要素の全体 Y_0 は Y の閉部分集合で、任意の $y \in Y_0$ に対して $(*)$ を満たす X の要素 $x = h(y)$ は一意に定まり、こうして得られた写像 h は X の上への連続写像である。更に Y 上の連続関数 w が存在して

$$(Tf)(y) = w(y)f(h(y)), \quad f \in C(X), \quad y \in Y_0, \\ |w(y)| = \|w\| = 1, \quad y \in Y_0.$$

が成り立つ。

T が順序の構造を保存するときには、 $w = T1$ は Y_0 上で定数 1 になる：

定理 3 T が $C(X)$ から $C(Y)$ への順序線型等長写像ならば、

$$(Tf)(y) = f(h(y)), \quad f \in C(X), \quad y \in Y_0.$$

が成り立つ (Gęba-Semadeni [4])。そしてもしも像 $N = T(C(X))$ が Y 上の関数空間ならば Y_0 は N の Nilou 境界である (Bauer [2])

§2 一般に $C(X)$ の部分空間 M が関数空間であるとは M が定数関数を含み (unital), X の点を分離する (分離的である) とき 複素数値関数の 閉部分代数 A が関数環であるとはそれが同時に関数空間であるときという.

関数環や関数空間の線型等長写像については個別にいろいろな研究がある ([3], [8], [9], [11]). また関数空間の枠をこえて、種々の Banach 空間や Banach 環の線型等長写像については多様な結果が得られている (C^* 環については周知のとおり [7]).

私たちは上掲の定理 2 を関数空間に一般化し、併せて Y_0 の性格を明確にしたい. そして関数空間の等長線型写像について既に知られている結果に統一的な視座を与えることを目指したい.

§3 $\Gamma \subset X$ が関数空間 M の境界であるとは、任意の $f \in M$ に対して $x \in \Gamma$ が存在して

$$\|f\| = |f(x)|$$

が成り立つときという. 任意の関数空間 M は最小の閉境界, つまり Šilov 境界 Γ_M , をもつ.

$\varphi \in M^*$ が

$$\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$$

を満たすとき φ は M の *state* であるという. M の *state* の全体を $\mathcal{S}_M$ と書く. $\mathcal{S}_M$ は M^* の w^* -compact convex set である.

$\phi(x) \in x \in X$ における M の関数の *evaluation* とすると $\mathcal{S}_M$ は $\phi(X) = \{\phi(x) : x \in X\}$ の w^* -closed convex hull と一致するから, $\phi(X)$ は $\mathcal{S}_M$ の端点の全体 $\text{ext } \mathcal{S}_M$ を含む. そして

$$\partial M = \phi^{-1}(\text{ext } \mathcal{S}_M)$$

は M の境界となる. これが M の *Choquet 境界* である. *Choquet 境界* はその表現測度が一意である x の点の全体である. また,

$$\overline{\partial M} = \Gamma_M$$

が成り立つ ([10]).

$C(X)$ の分離的な部分空間 M が *unital* でないとき $\mathcal{S}_M$ を

$$\{\varphi \in M^* : \|\hat{\varphi}\| = 1\}$$

で代えることにする. ただし

$$\hat{\varphi}(f+d) = \varphi(f) + d, \quad \varphi \in M, f+d \in \hat{M} \equiv M + \mathbb{C}$$

とする.

この $\mathcal{S}_M$ もまた M^* の w^* -compact convex set で $\phi(X)$ の w^* -closed convex hull $\overline{\text{co}} \phi(X)$ に等しい. したがって再び, $\phi(X) \subset \text{ext } \mathcal{S}_M$ である. そして $\phi^{-1}(\text{ext } \mathcal{S}_M)$ は M の境界である.

M が *unital* かそうでないかを問わずに $\phi^{-1}(\text{ext } \mathcal{S}_M)$ を Δ_M と書くことにする.

次に M を $C(X)$ の一般の部分空間とする.

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2), \quad \forall f \in M$$

によって同値関係 $\sim$ を定義し, この同値関係による X の商空間を $\tilde{X}$, 商写像を $\pi: X \rightarrow \tilde{X}$ とする. $\tilde{X}$ は compact Hausdorff space である.

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x), \quad f \in M, \quad x \in X$$

とする. 写像 $f \mapsto \tilde{f}$ は M から $C(\tilde{X})$ への線型等長写像で, もし M が unital ならば unital (定数関数 1 を定数関数 1 に写す) である. またその像 $\tilde{M}$ は分離的である. また

$$\tilde{\phi}(\tilde{x})(\tilde{f}) = \phi(x)(f) = f(x),$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{f}) = \phi(f)$$

とおく. すると

$$\Delta M = \bigcup_{\tilde{x} \in \Delta \tilde{M}} \tilde{x} = \bigcup_{\tilde{\phi} \in \text{ext } \tilde{M}} \phi^{-1}(\tilde{\phi})$$

とおく. これは M の境界である.

§4 $C(X)^*$ の閉単位球 $(C(X)^*)_1$ の端点はつぎの定理によって特徴づけられる:

定理 4 (Arens-Kelley [1])

$$\text{ext}(C(X)^*)_1 = \mathbb{T} \phi(X) = \{ \lambda \phi(x) : \lambda \in \mathbb{T}, x \in X \}$$

($\mathbb{T} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \}$). ただし $C(X)$ が実数値関数から成るときには $\mathbb{T}$ を $\{-1, 1\}$ で置き換えるものとする.

この定理を $C(X)$ の部分空間に拡張しよう.

定理 5 $C(X)$ の部分空間 M が unital ならば M^* の閉単位球を $(M^*)_1$ とし

$$\mathbb{T}\phi(\Delta_M) \subset \text{ext}(M^*)_1 \subset \mathbb{T}\phi(\overline{\Delta_M}).$$

ただし右側の inclusion は M が unital でなくとも成り立つ.

また, $C(X)$ が実数値関数から成るときには $\mathbb{T}$ を $\{-1, 1\}$ で置き換えるものとする.

右側の inclusion の証明の概略を述べよう.

M は分離的であるとし, $X = \overline{\Delta_M}$ であるとしてよい. $\phi \in \text{ext}(M^*)_1$ とすると $\|\phi\|=1$ で $\exists \psi \in C(X)^*$:

$$\psi|_M = \phi \quad \text{かつ} \quad \|\psi\| = \|\phi\| = 1.$$

ψ を X 上の regular Borel measure μ と同一視する. $\text{supp } \mu$ が singleton であれば議論は不要であるから, 2個以上の点を含んでいるとしよう.

もしも $x_1, x_2 \in \text{supp } \mu$, $x_1 \neq x_2$ ならば

$$\exists \text{ disjoint open sets } V_1 \ni x_1, V_2 \ni x_2.$$

そこで

$$\mu_1 = \mu|_{V_1}, \quad \mu_2 = \mu|_{V_2}$$

とおく. すると

$$\mu_1, \mu_2 \neq 0, \mu = \mu_1 + \mu_2, \|\mu\| = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|.$$

$$\mu|_M = \|\mu_1\| \left(\frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} \Big|_M \right) + \|\mu_2\| \left(\frac{\mu_2}{\|\mu_2\|} \Big|_M \right), \varphi \in \text{ext}(M^*)_1 \text{ であるから}$$

$$\varphi = \mu|_M = \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|} \Big|_M = \frac{\mu_2}{\|\mu_2\|} \Big|_M$$

よって $\forall f \in M$ に対して

$$\int f d\mu = \frac{1}{\|\mu_1\|} \int f d\mu_1 = \frac{1}{\|\mu_1\|} \int_{D_1} f d\mu_1 = \frac{1}{\|\mu_2\|} \int_{D_1} f d\mu_2 = 0.$$

これは不都合である.

§5 次の定理が私達の目的の定理である:

定理 6 T が X 上の関数空間 M から $C(Y)$ への線型等長写像ならば, $N \subseteq M$ の T による像とすると, N の閉境界 Γ から M の $\check{\text{Silov}}$ 境界 Γ_M の上への連続写像 h , Y 上の連続関数 w で

$$|w(y)| = \|w\| = 1, \quad y \in \Gamma$$

を満たすものが存在して

$$(Tf)(y) = w(y)f(h(y)), \quad f \in M, y \in \Gamma$$

が成り立つ.

証明の概略を述べる. ただし $C(X), C(Y)$ は複素数値関数から成るとする.

$x \in \partial M$ とすると, $\phi(x) \in \text{ext}(M^*)_1$. したがって定理 5 から

$$(T^{-1})^* \phi(x) \in \text{ext}(N^*)_1 \subset \mathbb{T} \phi(\overline{\Delta_N}).$$

ゆえに $\exists v \in \mathbb{T}, y \in \overline{\Delta_N}$:

$$(T^{-1})^* \phi(x) = v \phi(y), \text{ i.e. } (T^{-1}g)(x) = v g(y), \forall g \in N.$$

いま

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in X \times Y : \exists v \in \mathbb{T} \text{ s.t. } (T^{-1})^* \phi(x) = v \phi(y), \forall \phi \in N\}$$

とおく. これは compact. ？ ？

$$\Gamma_M = \overline{\mathcal{P}} \subset \{x \in X : \exists y \in Y \text{ s.t. } (x, y) \in \mathcal{P}\}$$

が成り立つ. また

$$\Delta = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ s.t. } (x, y) \in \mathcal{P}\},$$

$$\Gamma = \{y \in Y : \exists x \in \Gamma_M \text{ s.t. } (x, y) \in \mathcal{P}\}$$

とおく. $\forall y \in \Delta$ に対して $(x, y) \in \mathcal{P}$ を満たす x が一意に定まり, しかも写像 $y \mapsto x$ が連続であることがわかる. 一方 Γ は N の開境界である. 実際 Γ が閉集合であることは明らかである. また $\forall g \in N$ に対して $\exists x \in \Gamma_M$:

$$|(T^{-1}g)(x)| = \|T^{-1}g\| = \|g\|.$$

この x に対して $\exists y \in \Gamma, v \in \mathbb{T}$:

$$\|g\| = |(T^{-1}g)(x)| = |v g(y)| = |g(y)|.$$

よって Γ は N の境界である.

$y \in \Delta$ を x に写す写像を Γ 上で考えて h と記す. これは Γ_M の上への連続写像になる. v は $y \in \Gamma$ に依存するから改めて $v(y)$ と書くと

$$f(h(y)) = v(y)(Tf)(y), \quad f \in M, y \in \Gamma.$$

よって

$$I = v(y)(T1)(y), \quad y \in I.$$

したがって $w = T1$ とおけば定理の条件が成り立つことがわかる。

定理7 前定理でもしも X が *stonean space* ならば $I \in N$ の極小の開境界にすることができる。

なぜならば k は *upper semicontinuous* であるから次の定理によって *continuous selection* σ をもつことがわかる。

定理8 (Hasumi [5]) X は *extremally disconnected Hausdorff space*, Y は *regular Hausdorff space*, Y の空でない *compact subset* の全体を $\mathcal{F}_c(Y)$, ψ は X から $\mathcal{F}_c(Y)$ への *upper semicontinuous map* とする。このとき ψ は *continuous selection* をもつ。

したがって定理6から $\sigma(\Gamma_M)$ は N の極小の開境界であることがわかる。

なお, ψ が *upper semicontinuous* であるとは, 任意の *open set* $U \subset Y$ に対して $\{x \in X: \psi(x) \subset U\}$ が X の *open set* になるこ

とである。

References

- [1] R. F. Arens and J. L. Kelley, Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 265-274.
- [2] H. Bauer, Šilovske Rand und Dirichletsche Problem, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 11 (1961), 89-136.
- [3] M. El-Gebeily and J. Wolfe, Isometries of the disc algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* 93 (1985), 697-702.
- [4] K. Geġba and Z. Šemadeni, Spaces of continuous functions (V), *Studia Math.* 19 (1960), 303-320.
- [5] M. Hasumi, A continuous selection theorem for extremally disconnected spaces, *Math. Ann.* 179 (1968), 83-89.
- [6] W. Halsztyński, Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous function, *Studia Math.* 26 (1966), 133-136.
- [7] R. V. Kadison, Isometries of operator algebras, *Ann. Math.* 54 (1951), 325-338.

- [8] A. J. Lazer, Affine products of simplexes, *Math. Scand.* 22 (1968), 165-175.
- [9] J. N. McDonald, Isometries of function algebras, *Ill. Journ. Math.* 17 (1973), 579-583.
- [10] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem, *Van Nostrand Math. Studies* 7, 1966.
- [11] T. S. S. R. K. Rao, Isometries of $A_c(K)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 85 (1982), 544-546.