

群上の方程式、関数について

山口大学教育学部

飯寄信保 (Iiyori, Nobuo)

今回の講演において、群上の方程式、関数を扱う上での基本的な道具について解説した。その内容については、本研究の共同研究者である阿部晴一氏の熊本大学における修士論文に極めて詳しく解説されているのでそちらの方を参照して下さい。以下では、簡単ですがなぜこのようなことをはじめたかについての理由の一つについて説明したいと思います。

G を有限群とします。 $f(x)=x^n$ を考えてやると自然に f は G から G への写像 ($g \mapsto g^n$) と考えられます。よく知られた事実ですが $\#f^{-1}/(n, |G|) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が成立します。今この $\#f^{-1}/(n, |G|)$ を φ_n とかくとします。W. Feit は " φ_n はいかなる意味をもつか" という問題を提出しています。我々はこの問題を有限群の単純群の分類と独立に考えたいわけですから、その手法は今のところ二つに分れているのですが、その一つは G を $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$ などに埋め込み、そこで幾何的考察をするものです。今回はこれについては説明を略させてもらいますが、先にふれた修論に多少解説してあります。

さて φ_n は (φ_n, n) を考える上で $L_n = \{x \in G \mid x^n = 1\}$ を考えることは自然なことといえるでしょう。そこで $\mathcal{F} = \{L_n \mid n \mid |G|\}$ を考えることにします。これは、 G 上に自然に位相を与えることになります。この位相を直接考えるのも良いのですが、多少の理由より、少し一般化したものを考えた方がより計算し易くなります。即ち $SE_1(H; G) = \{f(x) \mid f(x) = a_1 x^{e_1} a_2 x^{e_2} \cdots x^{e_r} a_0, e_i \in \mathbb{Z}_{\neq 0}, a_i \in H^{\#} (i=2, \dots, r), a_1, a_0 \in H, a_1 a_2 \cdots a_r a_0 = 1\}$ (但し $H < G$) とおき $f(1)^{\#}$ を closed set とする 最 弱 の 位 相 を $G^{\#}$ 上 に 考 え る め け で す。この場合、 G に有限性の条件を与える必要はありません。先にふれた Feit の問題は、" $SE_1(H; G)$ による $G^{\#}$ 上の位相と群 G の関係を明らかにせよ。" と書き直せます。例えば " $SE_1(G; G)$ で位相を考えた場合 $G^{\#} \simeq H^{\#}$ かつ G が可換有限群ならば $G \simeq H$ "などは直ぐに検証できます。又 G が単純群であるならば $G^{\#}$ は $SE_1(G; G)$ による位相で離散的になります。又 $SE_1(G; G)$ による位相で離散的な群は、群構造上と著るしい特長があることがわかり大まかに分類されている。これらを導く上で重要なことは $SE_1(H; G)$ を調べることであり、これについて今回の講演で話しをさせてもらいたいわけですが、この $SE_1(H; G)$ について調べることは、先にふれた $GL_n(\mathbb{C})$ などに埋め込みを考えた時にも非常に大切であることが解っており、 $SE_1(H; G)$ などを中心とした群上の方程式、関数の理論を現在調べている

わけです。 $G^\#$ 上の位相については現在準備中の論文にて解説する予定です。

以上