

Sharp Permutation Groups

清田正夫

東大理大学院

以下に述べることは 伊藤達郎氏と筆者の共著の論文 [1] の紹介である.

(G, Ω) を permutation group, $|\Omega| = n$ とし θ をその permutation character とする. $L = \{l_1, \dots, l_r\} = \{\theta(x) \mid x \in G, x \neq 1\}$, $l_1 < \dots < l_r$ とおく. このとき次の不等式 (*) が成立する (cf. [2]):

$$(*) \quad |G| \leq \prod_{i=1}^r (n - l_i).$$

(*) で等号が成立している時, G を sharp (or L -sharp) permutation gp と呼ぶ. 次の問題は極めて自然である.

問題 自然数の集合 L が与えられた時, L -sharp group をすべて求めよ.

$L = \{l, l+2\}, \{l, l+3\}, \{l, l+1, \dots, l+r-1\} \quad (r \geq 2)$
 の場合には L -sharp group は 次のように分類される.

$$F(G) = \{ \alpha \in \Omega \mid \alpha^x = \alpha \quad \forall x \in G \},$$

$$f(G) = |F(G)|, \quad \Omega' = \Omega - F(G) \text{ とおく.}$$

定理 1 (G, Ω) を $\{l, l+2\}$ -sharp group とする.

このとき次のいずれかが起こる.

(i) $f(G) = l$, G は Ω' 上 transitive, rank 3 である.

$$G \cong D_8, S_4, GL(2, 3), PSL(2, 7).$$

$$|\Omega'| = 4, 6, 8, 14.$$

(ii) $f(G) = l-1$, G は Ω' 上に 2 つの orbits を持つ.

$$G \cong S_4, PSL(2, 7).$$

$$|\Omega'| = 7, 15.$$

(i) において, S_4 は 2 つの異なる置換表現を持つ.

定理 2 (G, Ω) を $\{l, l+3\}$ -sharp group とする.

このとき次のいずれかが起こる.

(i) $f(G) = l$, G は Ω' 上 transitive である.

$$G \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2, (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes S_3, (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes S_4$$

$$\mathbb{Z}_3 \times PSL(2, 4), \mathbb{Z}_3 \times PSL(2, 7)$$

$$|\Omega'| = 6, 9, 27, 15, 24 \quad (\text{resp}).$$

(iii) $f(G) = l-2$, G は Ω' 上 3 つの orbits を持つ.

$$G \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes \mathbb{Z}_2, \quad |\Omega'| = 8.$$

(i) において, $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \rtimes S_3$ は 2 つの異なる置換表現を持つ.

定理 3 (G, Ω) を $\{l, l+1, \dots, l+r-1\}$ -sharp group

($r \geq 2$) とする. このとき $f(G) = l$, G は Ω' 上

sharply r -transitive である.

以下, 定理 1 の証明を述べる.

補題 4 (G, Ω) を $\{0, l_2, \dots, l_r\}$ -sharp group とする.

このとき G は Ω 上 transitive である. さらに

$(G_\alpha, \Omega - \{\alpha\})$ は $\{l_2-1, \dots, l_r-1\}$ -sharp となる ($\alpha \in \Omega$)

証明 (G_α, Ω) に (*) を用いればよい.

補題 5 (G, Ω) を $\{l, l+s\}$ -sharp group とする.

このとき $f(G) \geq m$ となる. $m = ?$

$$m = l + (1-s)s' + s'^2 - 1$$

$$s' = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{s-1}{2} \right\rceil \right\} \quad \text{とおく.}$$

証明 $\theta = \sum_{\chi_i \in \text{Irr}(G)} a_i \chi_i$, $\chi_0 = 1_G$ とおく. 明らかに

$$(\alpha) \quad f(G) + \sum_{i \neq 0} a_i \geq a_0 \quad \text{が成立する.} \quad \text{また}$$

$\hat{\theta} = (\theta - l\chi_0)(\theta - (l+s)\chi_0)$ とおくと, $\hat{\theta}$ は G の正則表現の指標になるから $(\hat{\theta}, \chi_0) = 1$. よ, $\therefore$

$$(\beta) \quad \sum a_i^2 - (2l+s)a_0 + l(l+s) = 1 \quad \text{が成立する.}$$

$$\sum a_i^2 \geq a_0^2 + 1 \quad \text{だから} \quad (\beta) \text{ と合わせると } l \leq a_0 \leq l+s.$$

$$\text{一方 } a_0 = (\theta, \chi_0) > l \quad \text{だから}$$

$$(\gamma) \quad l < a_0 \leq l+s.$$

$$(\alpha) \text{ と } (\beta) \text{ から } f(G) \geq a_0 - 1 + (a_0 - l)(a_0 - l - s).$$

容易な計算により, m を上のように定義すると

$$\min \{ a_0 - 1 + (a_0 - l)(a_0 - l - s) \mid a_0 = l+1, \dots, l+s \} = m$$

となることが分かる. 従って $f(G) \geq m$.

定理 1 の証明 $F(G) = \phi$ と (7) より 補題 5 より

次の 2 つ の場合が起こる.

$$\text{I} \quad L = \{0, 2\}$$

$$\text{II} \quad L = \{1, 3\}$$

I の場合. 補題 4 より G は Ω 上 transitive となる.

また G_α は Ω 上に 3 つの orbits を持ち, orbit の長さはそれぞれ 1, 1, $|G_\alpha|$ となることもすぐ分かる. ($\alpha \in \Omega$)
 このような rank 3 permutation group は [3] で分類されている.

II の場合. 補題 5 の証明と同様にして $\theta = 2\chi_0 + \chi_1 + \chi_2$ となることが分かる. 従って G は Ω 上に 2 つの orbits Δ_1, Δ_2 を持ち, 各 orbit 上に 2 重可移である.

1° G^{Δ_1} が ^{not} faithful の時.

$|\Delta_1| = 2$ または 3 となる. $\alpha, \beta \in \Delta_1$ とする.

$G_{\alpha\beta}$ に (*) を用いて

$$(n-1)(n-3) = |G| \leq 6 |G_{\alpha\beta}| \leq 6(n-3).$$

よって $n \leq 7$ となる. $G \cong S_4$, $n = 3 + 4$ と

なることが容易に分かる.

2° G^{Δ_i} が faithful の場合 ($i = 1, 2$)

$|\Delta_1| \geq \frac{n}{2}$ としよ. $\alpha, \beta \in \Delta_1$ とする.

$$\begin{aligned} (n-1)(n-3) &= |G^{\Delta_1}| = |\Delta_1|(|\Delta_1| - 1) |G_{\alpha\beta}^{\Delta_1}| \\ &\geq \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) |G_{\alpha\beta}^{\Delta_1}|. \end{aligned}$$

よって $|G_{\alpha\beta}^{\Delta_1}| \leq 3$ となる. また G^{Δ_1} は

regular normal subgroup を持たない. このよう
な 2 重可移群 G^{Δ} は分類されている. それらの群は
 $PSL(2, 7)$ を除くと 要求される置換表現を持たない.
よ, $G \cong PSL(2, 7)$, $n = 8 + 7$ となる.

Reference

- [1] T. Ito and M. Kiyota, Sharp permutation groups,
to appear
- [2] M. Kiyota, An inequality for finite
permutation groups, to appear in J. Comb. Theory (A)
- [3] T. Tuzuku, Transitive extension of certain
permutation groups of rank 3, Nagoya Math.
J. 31 (1968), 31 - 36.