

グラフの被覆分解

日本医科大学	安藤 清
東京理科大学	江川 嘉美
電気通信大学	水野 弘文

序

G を単純グラフとし, $\bar{G}$ をその補グラフとする。我々は先に $G, \bar{G}$ がともに自明でないカルテシアン積に分解できるならば, G は $2K_2, C_4, Q_3, K_4 \times K_2, K_2 \times (K_2 + \bar{K}_2), K_3 \times K_3$ のいずれかであることを報告した。

ここでは カルテシアン積の一つの拡張としてグラフの被覆分解を導入し, $G, \bar{G}$ ともに自明でない被覆分解をもつグラフを決定することを試みる。

1. 定義と例

ここでは単純グラフを考える。グラフ G の点集合を $V(G)$ 、辺集合を $E(G)$ であらわす。 $|G| = |V(G)|$, $\|G\| = |E(G)|$ とおく。 $V' \subset V(G)$ および $E' \subset E(G)$ で誘導される G の部分グラフをそれぞれ $G[V']$, $G[E']$ であらわす。 G において点 x に隣接する点の集合を x の近傍と呼び, $N(x; G)$ であらわす。

G, H を $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ なる2つのグラフとする。 $V(G)$ から $V(H)$ の上への写像 p は G の任意の辺 xy について $p(x) = p(y)$ または $p(x)p(y) \in E(H)$ となるとき, G から H への射影と呼ばれる。とくに G の任意の点 x の近傍 $N(x; G)$ への制限 $p|_{N(x; G)}$ が1対1写像であるとき射影 p は局所同相であるといわれる。

定義 1 グラフ G からグラフ H への局所同相な射影 p が存在するとき (G, p) を H 上の被覆という。または単に G は H 上の被覆であるという。また $u \in V(H)$ について $|p^{-1}(u)| = n$ であるとき G は H 上の n -被覆であるという。

G を H 上の n -被覆とし 射影 p に関する H の辺 uv の逆像を $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n\}$ とする。(ただし $p(x_i) = u, p(y_i) = v, 1 \leq i \leq n$)。 G から2辺 $x_1 y_1, x_2 y_2$ を除き、新たに2辺 $x_1 y_2, x_2 y_1$ を加える操作を“射影 p に関する辺交換”と呼ぶ。このとき G に射影 p に関する辺交換を施して得られるグラフを G' とすると (G', p) はまた H 上の n -被覆である。また H 上の任意の n -被覆 (G, p) は nH に p に関する辺交換を繰返し施すことによって得られる。

定義 2 グラフ G に対し、 $E(G)$ の分割 E' , E'' とグラフ H , F があって さらに以下の条件 (A), (B) を満たす $G[E']$ から H への射影 p と $G[E'']$ から F への射影 q が存在するとき、 G は (H, F) - 被覆分解可能であるという。

(A) $(G[E'], p)$, $(G[E''], q)$ はそれぞれ H , F 上の被覆である。

(B) 任意の $u \in V(H)$, $v \in V(F)$ に対し、 $p \mid q^{-1}(v)$, $q \mid p^{-1}(u)$ はともに 1 対 1 写像である。

$G = H \times F$ ならば G は (H, F) - 被覆分解可能である。定義より次の補題が得られる。

補題 1 グラフ G は (H, F) - 被覆分解可能であるとし、被覆分解を与える射影を p , q とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $|G| = |H| |F|$,

(2) $\|G\| = |H| \|F\| + |F| \|H\|$,

(3) H , F がともに連結ならば G も連結である。

(4) p または q に関する辺交換を施して得られるグラフはまた (H, F) - 被覆分解可能である。

とくに任意のグラフは (K_1, G) - 被覆分解可能であるが、これを G の自明な被覆分解と呼ぶ。

定義 3 G を (H, F) - 被覆分解可能なグラフとする。

$p: G[E'] \longrightarrow H$, $q: G[E''] \longrightarrow F$ を分解を与える射影とする。このとき 任意の点 $u \in V(H)$ について $p^{-1}(u) \cong F$ が成立するならば、この分解は F に関して単純であるといわれる。

F に関して単純な (H, F) - 被覆分解を略して 単純な (H, F) - 被覆分解あるいは単に 単純な被覆分解と呼ぶ。単純な被覆分解では $G[E''] \cong |H| F$ である。

補題 2 (三角形補題) 射影 $p: G[E'] \longrightarrow H$, $q: G[E''] \longrightarrow F$ が F に関して単純な G の被覆分解を与えるものとする。このとき G の任意の三角形 K_3 について $E(K_3) \subset E'$ または $E(K_3) \subset E''$ が成り立つ。

注意] 単純でない被覆分解では上の補題の結論は必ずしも成立しない。

G , $\bar{G}$ とともに自明でない被覆分解可能なグラフの全体を $\mathcal{G}$ であらわす。また、 G , $\bar{G}$ とともに自明でない単純被覆分解可能なグラフ全体を $\mathcal{G}'$ であ

らわす。

例 1 (グラフの被覆分解)

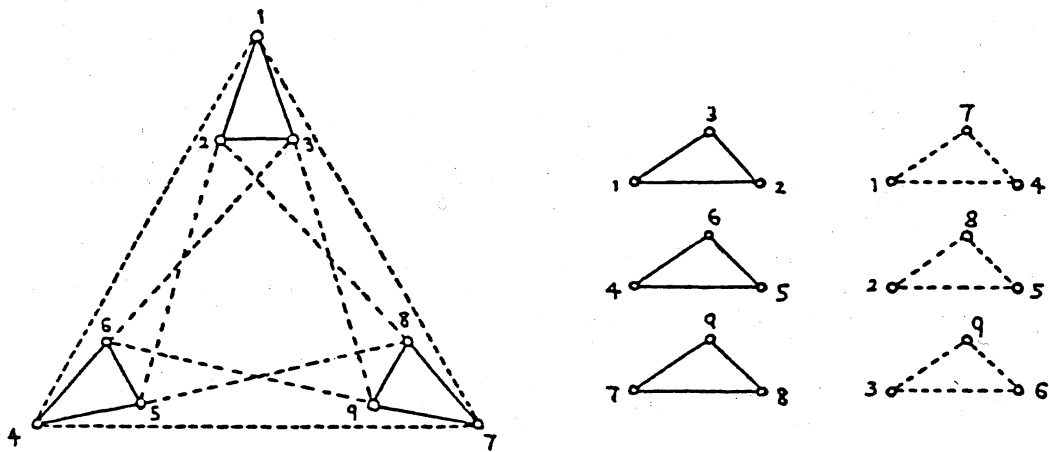


図 - 1 カルテシアン積

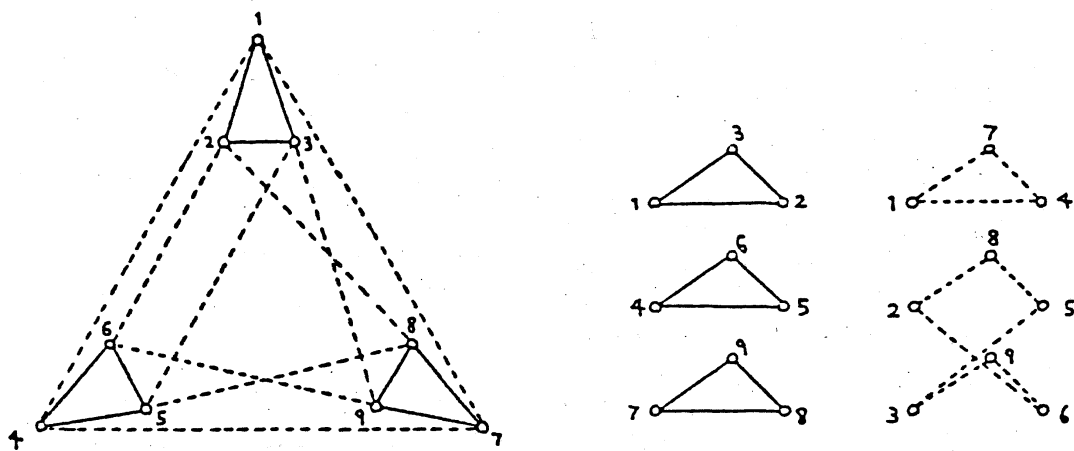


図 - 2 単純な被覆分解

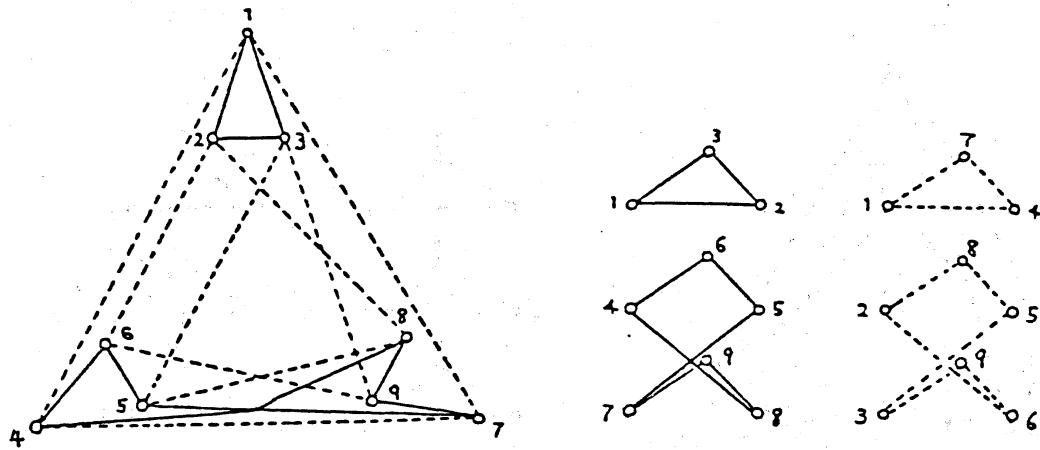


図-3 被覆分解

例 2

G のグラフの重要な系列を以下 定義する。

I を $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合とすると、 I に対してグラフ $D_n(I)$ を

$$V(D_n(I)) = \{x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$E(D_n(I)) = E(K_{2n}) - \{x_i y_i \mid i \in I\}$$

で 定義する。

また $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $L \subset \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ に対してグラフ $C_n(I, L)$ を

$$V(C_n(I, L)) = \{x_{\varepsilon, i}, y_{\varepsilon, i} \mid \varepsilon = \pm 1, 1 \leq i \leq n\}$$

$$E(C_n(I, L)) = \{x_{1, i} x_{-1, i}, y_{1, i} y_{-1, i} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$\cup \{x_{\varepsilon, i} y_{\varepsilon, i} \mid \varepsilon = \pm 1, i \notin I, 1 \leq i \leq n\}$$

$$\cup \{a_{\varepsilon, i} b_{\varepsilon, j} \mid \varepsilon = \pm 1, (i, j) \in L\}$$

$$\cup \{a_{\varepsilon, i} b_{-\varepsilon, j} \mid \varepsilon = \pm 1, (i, j) \notin L\}$$

(ただし a, b は x および y を動かすものとする。)

で定義する。

$G \cong D_n(I) \times K_2$, または $G \cong C_n(I, L)$ なるグラフ G の全体を $\mathcal{E}$ であらわす。 $\mathcal{E}$ に含まれるグラフの位数は 4 の倍数である。

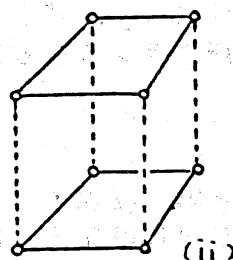
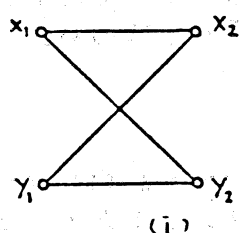


図-4 (i) $D_n(I)$; $I = \{1, 2\}$ (ii) $D_n(I) \times K_2$

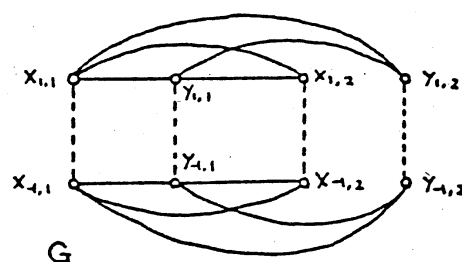
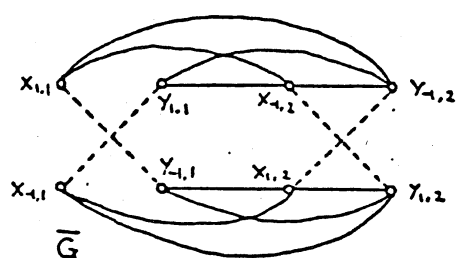


図-5 $C_n(I, L)$ の例 ; $G = K_2 \times (K_2 + \overline{K_2})$

2. $\mathcal{G}$ および $\mathcal{G}'$ の特徴付け

定理 1 $G, \overline{G}$ ともに自明でない被覆分解可能なグラフであるとす
る。このとき

- (1) $|G|$ が偶数ならば, $|H| = |G|/2$ なるグラフ H が存在して,
 $G, \overline{G}$ の被覆分解の少なくとも一方は (K_2, H) - 被覆分解である。
- (2) $|G|$ が奇数ならば, $G, \overline{G}$ の被覆分解はともに (K_3, K_3) -
被覆分解である。

定理 2 $G, \overline{G}$ がともに自明でない単純な被覆分解可能なグラフで
あるための必要充分条件は $G, \overline{G}$ のいずれかが (1) 単純な $(K_2,$
 $K_n)$ - 被覆分解可能なグラフ, (2) $K_3 \times K_3$, または (3) $\mathcal{E}$ のグラ
フ であることである。

注意) G が単純な (K_2, K_n) - 被覆分解可能なグラフならば, その補グラフ $\bar{G}$ は単純な $(\bar{K}_2, K_n)$ - 被覆分解可能なグラフである。また, $K_3 \times K_3$ は自己補グラフであり, $G \in \mathcal{E}$ ならば $\bar{G} \in \mathcal{E}$ である。

文 献

- [1] 安藤 清、水野 弘文: Direct product decomposition of graphs, 日本数学会1983年度年会, 応用数学分科会アブストラクト 25-26 (1983)
- [2] K.Ando, H.Mizuno: Bidecomposable Six Graphs, to appear
- [3] K.Ando, Y.Egawa, H.Mizuno: Covering Decomposition of Graphs, pre-print