

Hypo-elliptic pseudo-differential operators with double characteristics

東工大理 平 良 和 昭

§1. 序

与えられた pseudo-differential operator $P(x, D)$ (以下 P.D.O. と略)
が原点の近傍 Ω で Hypo-elliptic (以下 H.E. と略) であるとは:

任意の open set $\Omega_1 \subset \Omega$ に対して $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (或 u は $\mathcal{E}'(\Omega)$),

$Pu \in C^\infty(\Omega_1)$ ならば $u \in C^\infty(\Omega_1)$

となることをいう。 $P(x, D)$ の characteristic $\Sigma = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \mid$
 $p_m(x, \xi) = 0\}$ ($p_m(x, \xi)$ は P の主部) が "simple,, の場合を扱って
いるものとして Hörmander [11], Egorov [3], Treves [23] 等がある。

さて, characteristic が "double,, の場合は未だ流動的である。
"double,, の定義についても考えなければならぬが, 本稿で
は具体的な場合しか考察しない (§2 をみよ)。ところで, "double,,
の場合同次の 2 つの方法に要約される (下の(注意 3) もみよ):

[I] V とは, principal symbol $p_m(x, \xi)$ に対する条件をゆきめ
て低階に制限を加え, いちゆる Half Estimates を導く方法であ

る。 $m=2$ の場合の principal symbol に対する条件は, $P_2(x, \xi) = \sum_{j=1}^K X_j(x, \xi)^2$
 ($X_j(x, \xi)$ は ξ について 1 次斉次の real symbol) とするときは

$$(A1) \quad \sum_{j,l=1}^K |\{X_j, X_l\}(x, \xi)| > 0, \quad \forall (x, \xi) \in N = \{(x, \xi) \in K \times \mathbb{S}^{n-1} : X_1(x, \xi) = \dots = X_K(x, \xi) = 0\}$$

($\{ \cdot, \cdot \}$ は Poisson bracket, K は原点を含む compact set)

或いは, $X_j(x, \xi)$ 達が偏微分作用素のときは

$$(A1)' \quad \{X_j, \}_{j=1}^K, \{[X_j, X_l]\}_{j,l=1}^K \text{ が Vector field を張る}$$

($\{ \cdot, \cdot \}$ は交換子)

というようになる。 (A1) 或いは (A1)' のもとでは, 原点の近傍 Ω が存在して, 適当な正の定数 C_1, C_2 に対して,

$$\operatorname{Re} (P_2(x, D)u, u) \geq C_1 \|u\|_{\frac{1}{2}}^2 - C_2 \|u\|_0^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega)$$

なる Half Estimate が成立する。従って, 低階, 即ち, 1 階の項 $q(x, \xi)$ を加えた $P(x, D) = P_2(x, D) + q(x, D)$ に対しても上の不等式が成立することを示せば, 要は, よく知られた議論から $P(x, D)$ に対する H.E. が導かれる。 $q(x, \xi)$ に対する条件について例を 2 つのべる。

例 1 (cf. Kohn [14])

$$(C1) \quad |\{X_1, X_2\}(x, \xi)| + \operatorname{Re} q(x, \xi) > 0, \quad \forall (x, \xi) \in N$$

ならば $P(x, D) = \sum_{j=1}^K X_j(x, D)^2 + q(x, D)$ は H.E. である。低階 $q(x, \xi)$ の処理には, $\bar{\partial}$ -Neumann 問題 (Folland and Kohn [4]) でよく使われる技法 $\sum_{j=1}^K X_j^2 = \sum_{j=1}^K \sigma_j X_j^2 + \sum_{j=1}^K (1-\sigma_j) X_j^2$ ($0 < \sigma_j < 1$) と Melin [17] の結果に注意すればよい。

例2 (Folland and Kohn [4]) $\bar{\partial}_b$ -Neumann 問題の場合の低階に
 対する条件は、いわゆる Levi form の正負の固有値の数に對する
 条件であり、これから a sharp form of Gårding's inequality と 例1
 でのべた技法により Half Estimate が導かれる。

(注意1) System の場合でも 例2 のような principal symbol
 が“対角形”、のときは単独な場合の証明法が通用する。(例えば
 Boutet de Monvel and Preves [2].)

[II] もうひとつは、principal symbol に對する条件を強めて低
 階に對するかなり精密な(必要)十分条件を、Parametrix を構成
 して導く方法である。 $m=2$ の場合の principal symbol に對する条
 件は $P_2(x, \xi) = \sum_{j=1}^k r_j(x, \xi) \cdot \overline{r_j(x, \xi)}$ ($r_j(x, \xi)$ は ξ について 1 次齊次)
 とするとき

$$(A1)'' \quad -\{ \operatorname{Re} r_j, \operatorname{Im} r_j \}(x, \xi) = -\sqrt{-1} \{ r_j, \overline{r_j} \}(x, \xi) > 0, \quad \forall (x, \xi) \in \{ (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \mid 0 < |\xi| \leq 1 \}$$

$$r_1(x, \xi) = \dots = r_k(x, \xi) = 0 \mid = \Sigma \quad (\text{これは (A1), (A1)' に対応する}) ;$$

$$(A2) \quad \{ d \operatorname{Re} r_j(x, \xi) \}_{j=1}^k, \{ d \operatorname{Im} r_j(x, \xi) \}_{j=1}^k \quad \Sigma \text{ 上 一 次 独 立} ;$$

$$(A3) \quad \{ r_j, r_{\bar{k}} \}(x, \xi) = 0 \quad \text{at } \Sigma ;$$

$$(A4) \quad \{ r_j, \overline{r_{\bar{k}}} \}(x, \xi) = 0 \quad \text{at } \Sigma \quad \text{when } j \neq k ;$$

というようになる。このとき、 $P_2(x, \xi)$ は micro-local に
 性質のよくわかる形に正準変換することができ、低階 $q(x, \xi)$ の
 みたすべき条件が次のように詳しくわかる：

$$(C1)' \quad q(x, \xi) + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^k \{ r_j, \overline{r_j} \}(x, \xi) (1+m_j) \neq 0, \quad \forall (x, \xi) \in \Sigma, \forall m_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

ならば $P(x, D) = P_2(x, D) + Q(x, D)$ は H.E. である。ここで、条件 (C1)' の意味するところを理解するために具体的な例を二つあげる。

例 3 (Folland and Stein [5]) $(x, y, t) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, dual 変数 $(\xi, \eta, \tau) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, $X_j = \frac{1}{2}(\eta_j - 2x_j\tau)$, $Y_j = \frac{1}{2}(\xi_j + 2y_j\tau)$, $Q = -\alpha\tau$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), $P(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \sum_{j=1}^k (X_j^2 + Y_j^2) - \alpha\tau$ とする。このとき, $\tau (\neq 0)$ に対して x, y について 2 部分 Fourier 変換をやり (Elementary canonical transformation を引く起す), 次に, 変数変換 $z_j = \frac{1}{|\tau|^{1/2}}(x_j\tau - \frac{1}{2}\eta_j)$, $w_j = \frac{1}{|\tau|^{1/2}}(y_j\tau + \frac{1}{2}\xi_j)$ を行えば $P(x, y, t, D_x, D_y, \tau)$ は $\tilde{P}(z, D_z, \tau) = |\tau| \sum_{j=1}^k (z_j^2 + D_{z_j}^2) - \alpha\tau$ になる (cf. Melin [7])。 ($\tilde{P}$ は z について Elliptic だが, (z, w) について Non-elliptic に注意。) ところで, $m = (m_1, \dots, m_k)$, $m_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, に対して $V_m(z) = \left(\prod_{j=1}^k H_{m_j}(z_j) \right) e^{-\frac{|z|^2}{2}}$, $H_{m_j}(z_j)$ は m_j 次の Hermite 多項式, とおけば $V_m(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ で

$$\tilde{P}(z, D_z, \tau) V_m(z) = (|\tau| K + 2|\tau| |m| - \alpha\tau) V_m(z)$$

だから, 特に, $\alpha\tau = |\tau| (K + 2|m|)$ のとき $\tilde{P}$ は (従って P は) H.E. でない。このようなことが起こる条件が正に (C1)' である。($\{X_j, Y_j\} = \tau$ に注意。) 書き直すと

$$(C1)' \Leftrightarrow a) \operatorname{Im} \alpha \neq 0, \text{ 或いは, } b) \alpha \in \mathbb{R} \text{ で } |\alpha| \neq K, K+2, K+4, \dots$$

(Folland and Stein [5] はおもしろいとは別の方法で証明しているようにあるが詳細はわからない。)

例 4 (Grušin [7]) $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, dual 変数 $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2$,

$$P(x, t, D_x, D_t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda \sqrt{t} \frac{\partial}{\partial x} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad \text{とする。この}$$

とき, x -方向に Fourier 変換して ξ (きの) を $\mathbb{R}$ から x - τ - とする。

$$\tilde{P}(x, t, D_t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^2 \xi^2 + \lambda \xi. \quad \xi = \tau, \quad \text{例 3 と同様 } v_m(t) =$$

$$H_m(|\xi|^{\frac{1}{2}} t) e^{-\frac{|\xi|^2}{2} t^2} \quad (\xi \neq 0), \quad m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad \text{とあける}$$

$$\tilde{P}(x, t, \xi, D_t) v_m(t) = (\lambda \xi - (2m+1)|\xi|) v_m(t)$$

だから, 特に, $\lambda \xi = (2m+1)|\xi|$ のときは $\tilde{P}$ は (従って P は)

$$\text{H.E. でない。} \quad (X = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial t}, Y = t \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{とあける } \{X, Y\} = \xi \text{ に}$$

注意。) 書き直せば (C1)' は

$$(C1)' \Leftrightarrow \lambda \neq \pm(2m+1), \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

(注意 2) 例 3, 例 4 とも $\underline{Pu = 0, u \in C^\infty}$ なる u の存在について考察してゐることに他ならない。(§2 の 定理 1 の (2) をみよ。)

さて, [I] の詳しい議論は別の機会に譲り, 本稿では, [II] の条件 (C1)' が成立しない場合を考察する。平良 [22] で触れた次の例が手がかかりになる。

例 5 (Grušin [7]) $\mathbb{R}^2$ で 例 4 の $\lambda = 1$ の場合を考える。

$$P(x, t, D_x, D_t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sqrt{t} \frac{\partial}{\partial x} + a t^2 \frac{\partial}{\partial x} \quad (a \in \mathbb{C})$$

$$\text{このとき, } P \text{ H.E.} \Leftrightarrow a \neq 0$$

(ゆえゆえのなるべきことを次のようにのべることもできる:

例5 の a を変数係数の場合に拡張すること。

(注意3) [I] は Hörmander [9], Radkevič [18], [19], Kohn [14], [II] は Grušin [6], [7], [8], Sjöstrand [20], [21] 等がある。 $n=3$ で, Boutet de Monvel and Preves [1], [2] や Preves [24] の "Concatenation", による方法は, いわば, [I] と [II] の中間的方法であって (C1)' を導くのに, Parametrix の構成によるのではなく, Half Estimate によっている。また, その方法は, Preves [24] からわかるように, (C1)' が成立しない場合にも通用すると思われるが, それは, 例5 についていえば $a(x) \neq 0$ の場合であって $a(x) = 0$ となり得る場合には駄目なようである。(従って, 次の §2 の 定理4, 系5, 定理6 は導くことができないようであるが, 筆者には詳しいことはよくわからない。)

§ 2. 結 果

$x \in \mathbb{R}^k$, $t \in \mathbb{R}^n$, dual 変数 $\xi \in \mathbb{R}^k$, $\tau \in \mathbb{R}^n$ の場合でもよいが, 簡単のため $n=1$ の場合しかのべない。また, 本質的な部分を見失わないために Situation をきわめて具体的に示すが, 一般化は比較的容易である。

まず, (C1)' が満たされている場合から始めよう。

定理 0 次の P.D.O. を考える: $P_1(x, t, D_x, D_t) = D_t^2 + (a(x) + \sqrt{-1}b(x) + c(x) + \sqrt{-1}d(x))t P(D_x) \frac{\partial}{\partial t} - (a(x) + \sqrt{-1}b(x))(c(x) + \sqrt{-1}d(x)) \times t^2 P(D_x)^2 + (c(x) + d(x)\sqrt{-1})P(D_x) - e(x)P(D_x)$, ただし

(H1) $a(x), b(x), c(x), d(x)$ 実数値で $a(x) > 0, c(x) < 0$;

(H2) $P(\xi) = |\xi|^\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}^+)$.

このとき,

$x=0$ の近傍が存在して $e(x) \neq (a(x) - c(x) + (b(x) - d(x))\sqrt{-1})m$,

$\forall m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

ならば, $P_1(x, t, D_x, D_t)$ は原点の近傍で H.E. である。

次に, (C1)' が成立しなむとすの結果を述べよう。

定理 1 $P_1(x, t, D_x, D_t)$ は 定理 0 と同じで

(*) $e(0) = (a(0) - c(0) + (b(0) - d(0))\sqrt{-1})m$ なる $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ が存在する

とする。

(1) $P(\xi) = |\xi|$ とする。このとき, 原点の近傍 Ω が存在して $\forall \varepsilon > 0, 0 < \delta < \frac{1}{2}$ に対して $P_1 u \in H_{0,\delta}^{loc}(\Omega)$ で $u \in H_{1-\delta}^{loc}(\Omega)$ 且 $u \notin H_{1-\delta+\varepsilon}^{loc}(\Omega)$ なる u が存在する。

(cf. Boutet de Monvel and Preves [2], Sjöstrand [21].)

(2) $P(\xi) = |\xi|^\lambda, a, b, c, d, e$ 定数係数とする。このとき, $\alpha = a + b\sqrt{-1}, \beta = c + d\sqrt{-1}$

$$v_m(x, t) = \int e^{ix\zeta} e^{\frac{\beta}{2} t^2 P(\zeta)} \frac{P_m(P(\zeta)^{\frac{1}{2}} t)}{(1+|\zeta|^2)^{l_m}} d\zeta \quad (l_m + \text{奇数})$$

$$P_m(z) = (-1)^m e^{\frac{\alpha-\beta}{2} z^2} \frac{d^m}{dz^m} (e^{-\frac{\alpha-\beta}{2} z^2})$$

とすれば, $D_t^m v_m(x, 0) \notin C_x^\infty$ で $P_1(x, t, D_x, D_t) v_m(x, t) = 0$
 特に, $P_1(x, t, D_x, D_t)$ は H.E. でない。

従, 2, 以後, あれこれ, a, b, c, d, e が定数で (*)
が成り立つ場合を詳しく考察する。 そのために, P_1 に
 低階をつけ加えたときの様子を記述する基本的な結果をあげる。

基本定理2 $P_1(x, t, D_x, D_t)$ は 定理0 と同じで a, b, c, d
 e が定数で (*) が成立してゐるとする。このとき

$$P_2(x, t, D_x, D_t) = P_1(x, t, D_x, D_t) + f(t) \omega(x, D_x)$$

$$f(0) = 0, \quad \omega(x, D_x) = \omega(x) P(D_x) + \varepsilon(x)$$

とすると次のような作用素 H, Q が存在する:

$$(1) \quad H\varphi(x, t) = \int e^{ix\zeta} \int e^{-i\zeta\zeta} k(t, z, \zeta) \varphi(z) dz d\zeta,$$

$$Q\varphi(x) = \int e^{ix\zeta} \int e^{-i\zeta\zeta} g(z, \zeta) \varphi(z) dz d\zeta$$

(cf. Hörmander [10], Kumano-go [15]). ここで, $k(t, z, \zeta)$,

$g(z, \zeta)$ は $(z \in \mathbb{R}^n \times -\mathbb{R}^n)$ とする) t に関する常微分方程式の初期値問題: $P_2(x, t, \zeta, D_t) k(t, z, \zeta) + e^{-\frac{\alpha}{2} t^2 P(\zeta)} g(z, \zeta) = 0$;

$k(0, z, \zeta) = 1$ の解である。

$$(2) \quad G\varphi(x, t) = \int e^{ix\xi} e^{-\frac{d}{2}t^2 P(\xi)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi \quad \text{とあると}$$

$$P_2 H\varphi + GQ\varphi = 0, \quad H\varphi(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{とある}$$

$$P_2 \text{ が H. E. } \iff Q \text{ が H. E.}$$

$$(3) \quad Q \in S^{1,0} \text{ (熊ノ郷 [6]) である}$$

$$Q \text{ の symbol } \sim \sum_{\gamma} \frac{D_x^\gamma \partial_\xi^\gamma q(x, \xi)}{\gamma!} \Big|_{\xi=x}$$

個々の場合について Q を計算することによって次の結果を得る。

定理 3 (cf. Treves [24]) $\omega(0) \neq 0, b=d=0, a+c=0$.

$f^{(l)}(0) \geq 0 \quad l=1, 2, \dots$ とする。

(1) $f(t)$ が有限次の接触ならば $P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

(2) $f(t)$ が無限次の接触ならば $P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. でない。

(注意) $f(t)$ のみならずより一般な十分条件は複雑である。

定理 4 $P(\xi) = |\xi|, f(t) = t^2$ とする。このとき

i) $\omega(0) = \omega'''(0) = \dots = \omega^{(k)}(0) = 0$;

ii) $0 \leq \delta < 1$ と原点の近傍 Ω が存在して, 任意の compact set $K \subset \Omega$ に対し $C(K) > 0, C(\theta, K) > 0$ が存在し

$$\begin{cases} (a) \quad |\omega(x) P(\xi) + \varepsilon(x)| \geq C(K), \quad \forall x \in K, \quad \forall |\xi| \geq C(K); \\ (b) \quad |\omega^{(0)}(x) P(\xi) + \varepsilon^{(0)}(x)| \leq C(\theta, K) (1 + |\xi|)^{\delta|\theta|} |\omega(x) P(\xi) + \varepsilon(x)|, \\ \quad \forall x \in K, \quad \forall |\xi| \geq C(K) \quad (\text{cf. Hörmander [12]}) \end{cases}$$

ならば, $P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

系 5 $k=1$, $\omega(0)=0$ の zero 点の order l とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} (a') \text{ 定数 } C > 0 \text{ が存在して, 原点の近傍で} \\ \quad \left| \operatorname{Im} \frac{\varepsilon(x)}{\omega(x)} \right| > C \left| \operatorname{Re} \frac{\varepsilon(x)}{\omega(x)} \right| \quad (\text{cf. Kannai [13]}) \\ (b') \quad l \geq 2 \end{array} \right.$$

ならば, $P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

$k=1$ で $\omega(x, D_x)$ が 常微分作用素 のときはより詳しく

定理 6. $\omega(x, D_x) = \omega(x) D_x^3 + \varepsilon(x) D_x^2$ とする。このと

き

$$\left\{ \begin{array}{l} (a'') \quad \omega(0)=0, \varepsilon(0) \neq 0 \\ (b'') \quad x \rightarrow 0 \text{ のとき } |x| \left| \operatorname{Re} \frac{\varepsilon(x)}{\omega(x)} \right| \rightarrow \infty \quad (\text{cf. Kannai [13]}) \end{array} \right.$$

ならば, $P_2(x, t, D_x, D_t)$ は H. E. である。

文 献

- [1] Boutet de Monvel and Treves, On a class of pseudodifferential operators with double characteristics, to appear.
- [2] —————, On a class of systems of pseudodifferential equations with double characteristics, to appear.
- [3] Egorov, On subelliptic pseudodifferential operators, Soviet Math.

Dokl., 10(1969), 1056-1059.

[4] Folland and Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Annals of Math. Studies, No. 75, Princeton university press, Princeton, 1972.

[5] Folland and Stein, Parametrixes and estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex on strongly pseudoconvex boundaries, to appear.

[6] Grušin, On a class of hypoelliptic operators, Math. USSR Sbornik, 12(1970), 458-476.

[7] ———, On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold, Math. USSR Sbornik, 13(1971), 155-185.

[8] ———, Hypoelliptic differential equations and pseudodifferential operators with operator-valued symbols, Math. USSR Sbornik, 17(1972), 497-514.

[9] Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math., 119(1967), 147-171.

[10] ———, Fourier Integral Operators I, Acta Math., 127(1971), 79-183.

[11] ———, Pseudodifferential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math., 83(1966), 129-209.

[12] ———, Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Amer. Math. Soc. Symp. on Singular Integral Operators, 1966, 138-183.

[13] Kannai, Hypoelliptic ordinary differential operators, Israel J. Math., 13(1972), 106-134.

[14] Kohn, Integration of complex vector fields, Bull. Amer. Math. Soc.,

78 (1972), 1-11

[15] Kumano-go, Oscillatory integrals of symbols of pseudodifferential operators and the local solvability theorem of Nirenberg and Preves, 偏微分方程式整田とそのホジウム, 1972, 166-191.

[16] 熊ノ郷, 擬微分作用素と其の周辺, 東大セミナー 25, 1970.

[17] Melin, Lower bounds for pseudodifferential operators, Ark för Matematik, 9 (1971), 117-140.

[18] Radkevič, A priori estimates and hypoelliptic operators with multiple characteristics, Soviet Math. Dokl., 10 (1969), 849-853.

[19] ———, Hypoelliptic operators with multiple characteristics, Math. USSR Sbornik, 8 (1969), 181-205.

[20] Sjöstrand, Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles, C. R. Acad. Sci., Paris, 276 (1973), 743-745.

[21] ———, Parametrixes for pseudo-differential operators with multiple characteristics, to appear.

[22] 平良, Hypoellipticity の同値類について, 数理解析研究新講究録 No. 192, 1973, 1-9.

[23] Preves, Hypoelliptic partial differential equations of principal type, Sufficient conditions and necessary conditions, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 631-670.

[24] ———, Concatenations of second-order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity, Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), 201-250.