

ストレイン渦のランダムな分布が与える 統計法則

東大理 畠山 望 (Nozomu Hatakeyama)

東大理 神部 勉 (Tsutomu Kambe)

概要

ストレインを受けている渦 (バーガス渦) のランダムな分布から得られる統計法則を調べ、一様等方性乱流場の結果と比較した。まず、構造関数は慣性領域に相当するスケーリング領域を持ち、特に 3 次構造関数がコルモゴロフの 4/5 法則に従うことが示される。また、乱流の実験や DNS で得られている、ワーム構造の循環分布を考慮に入れて、バーガス渦の循環に関する平均をとると、高次構造関数の異常スケーリングが実験や DNS の結果に良く一致し、速度差 PDF も慣性領域から粘性領域に向かって、よりガウス分布から逸脱した指数分布となるなど、乱流場の諸性質が良く捉えられていることが明らかになった。

1 はじめに

大きなレイノルズ数の乱流場には、細長く集中した渦構造が数多くランダムに分布していることが、最近の直接数値シミュレーション (DNS) [1, 2, 3, 4] や実験 [5] で報告されている。この構造は、通常「ワーム」と呼ばれる。個々のワーム構造は、平均的にはバーガス渦とみなすことができる [2, 3, 4]。また、この構造が「間欠的」な速度信号を生み出していることも確認されている [5]。これらの事実を念頭に、乱流場のもっともシンプルなモデルとして、1 本のバーガス渦が、統計的に有限領域内で一様等方分布する場を考え、その統計法則を研究した。その結果、構造関数のスケーリング指数が観測値と良く一致すること [6]、速度差の確率密度関数 (PDF) が指数分布をしていることなど、乱流場の特徴を良く再現することがわかった。

2 一様等方性乱流の統計法則

速度場を $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ として、ベクトル $\mathbf{s}$ に対する速度差 $\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{s}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$ が一様等方な場を考える。「縦速度差」を

$$\Delta v_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \hat{\mathbf{s}} \quad (1)$$

と定義する (ここで $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}/s$, $s = |\mathbf{s}|$)。 $\langle \cdot \rangle$ でアンサンブル平均をあらわすと、 p 次の「構造関数」は、 $S_p = \langle (\Delta v_\ell)^p \rangle$ で与えられる。一様等方性乱流場では、構造関数 S_p は位置 $\mathbf{x}$ と単位ベクトル $\hat{\mathbf{s}}$ には依存せず、「慣性領域」でスケーリング則

$$S_p(s) = \langle [\Delta v_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{s})]^p \rangle \sim s^{\zeta_p} \quad (2)$$

に従う。 ζ_p は p 次構造関数の「スケーリング指数」と呼ばれる。

ナヴィエ=ストークス方程式に従う一様等方場では、高レイノルズ数極限では (より正確には動粘性係数 $\nu \rightarrow 0$)、3 次構造関数が厳密にコルモゴロフの 4/5 法則

$$S_3(s) = \langle (\Delta v_\ell)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon s \quad (3)$$

であらわされる [7]。ここで、 ε は平均エネルギー散逸率であるが、波数空間で慣性領域内の任意波数を過ぎる、一定なエネルギー輸送率とする方がより適切かもしれない [8]。この 1941 年のコルモゴロフの理論では、次元解析的に一般次数構造関数のスケーリング則 $S_p(s) \sim (\varepsilon s)^{p/3}$ が示唆されている。そのスケーリング指数

$$\zeta_p = \frac{p}{3} \quad (4)$$

を、以下では K41 と呼ぶことにする。K41 は乱流場のスケーリング指数を正しく記述していないことがわかっている。

最近 She らにより提出された乱流の統計モデル [9] は、DNS [1] や実験 [10, 11] と良く合う結果を与える。このモデルでは、局所エネルギー散逸率を半径 r の球内で平均した量 ε_r の、「対数ポアソン統計」を仮定している。モデルに内在する 2 つのパラメータを現象論的に定めると、スケーリング指数は

$$\zeta_p = \frac{p}{9} + 2 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{p/3} \quad (5)$$

となる。以降これを SL モデルと呼ぶ。

ナヴィエ=ストークス乱流の高レイノルズ数極限においては、距離 s の速度差成分 $\Delta v(s)$ に関して、 s をパラメータとする PDF の族 $P_s(\Delta v)$ が定義できるような、不変測度が存在すると考えられる。この PDF の距離依存性は、構造関数のスケーリング則と対応している。乱流場においては、慣性領域での速度差 PDF は指数分布であり、粘性領域に近いほどガウス分布から離れていくことが知られている [12]。

3 ストレイン渦の分布が与える統計法則

3.1 バーガス渦

円柱座標系で $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ とおく。非圧縮渦なしの、線形ストレイン速度場 $\mathbf{v}_e(\mathbf{x}) = (-ar, 0, 2az)$ に埋め込まれた、軸対称ストレイン渦を考える (a は正定数)。軸対称渦度の誘導する速度を $\mathbf{v}_\omega(\mathbf{x}) = (0, v_\theta(r), 0)$ とおいて、全速度場は

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (-ar, v_\theta(r), 2az) \quad (6)$$

で与えられる。このとき、動粘性係数 ν を持つ、非圧縮ナヴィエ=ストークス方程式の定常厳密解が

$$v_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r_B} \frac{1 - e^{-(r/r_B)^2}}{r/r_B} \quad (7)$$

と得られる。ここで、 $r_B = (2\nu/a)^{1/2}$ は渦度の $1/e$ 半径、 Γ は全循環である。ガウス分布型の渦度をもつこの渦を、バーガス半径 r_B の「バーガス渦」と呼ぶ [13]。バーガス渦は、独立なパラメータとして r_B と Γ のみを持つことに注意する。

3.2 等方平均

速度場 (6), (7) を持つバーガス渦の、ランダムな分布が与える構造関数を、以下の手順で計算する。最初に、(1) で与えられる縦速度差 Δv_ℓ に対して、位置 $\mathbf{x}$ を中心とした半径 s の球面上の球面平均をとる。これは、球座標系 $\mathbf{s} = (s, \zeta, \phi)$ をとると、

$$\langle (\Delta v_\ell)^p \rangle_{\text{sp}}(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_0^\pi (\Delta v_\ell)^p \sin \zeta d\zeta \quad (8)$$

で与えられる。この段階で、速度場の位置 $\mathbf{x}$ における、距離 s に対するスケーリング則が得られる。逆に言えば、バーガース渦の全方向の分布に関して統計平均していることになる。

3.3 一様平均

次に、点 $\mathbf{x}$ について渦の軸対称領域で体積平均をとる。バーガース渦の軸を z 軸とした円柱座標系 $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ で、

$$\langle (\Delta v_\ell)^p \rangle_{\text{vol}}(s) = \frac{1}{\pi r_0^2 z_0} \int_{-z_0/2}^{z_0/2} dz \int_0^{r_0} \langle (\Delta v_\ell)^p \rangle_{\text{sp}} 2\pi r dr \quad (9)$$

となる。バーガース渦の与える縦速度差は z 成分に依存しないので、 z 積分は落すことができる。また、乱流場中のワームが、個々の距離をある程度保って存在していることから、 r についての積分の上限値 r_0 は有限にとどめるのが適当であると考えられる。この段階で、半径 r_B で循環 Γ の 1 本のバーガース渦が、統計的に有限領域内で一様等方に分布する場の構造関数が得られる。

ここで適当な r_0 を選ぶと、任意次数の構造関数に、慣性領域に対応するスケーリング領域が現れる。特に $r_0 = 2.5 r_B$ 前後に選ぶと、3 次構造関数は、無次元循環である「渦レイノルズ数」 $R_\Gamma = \Gamma/\nu$ には依らずに、比例係数まで含めて 4/5 法則 (3) に従うようになる (図 1)。また、一様等方性から厳密に得られる関係式に、慣性領域以下の十分小さなスケールにおける 2 次構造関数 $S_2(s) = (\varepsilon/15\nu)s^2$ があるが [7]、これも満たされる (ここで、平均エネルギー散逸率 ε として、局所散逸を r について同じ上限 r_0 まで平均した値を用いる)。従って、場の一様等方性の現れとして、現実の乱流場のワーム間距離が、ワーム半径の数倍というような値でなければならないことが示唆できる。

これ以降 $r_0 = 2.5 r_B$ に固定する。3 つの異なる渦レイノルズ数 $R_\Gamma = 600, 2000, 10000$ での、高次までの構造関数のスケーリング指数を図 2 に示す。循環が大きいほど、K41 (4) から逸脱した異常スケーリングを示すことがわかる。

3.4 循環の平均

乱流の DNS や実験によるワーム構造の解析の結果、その半径は分散が非常に小さい分布をしているが、渦レイノルズ数 $R_\Gamma = \Gamma/\nu$ は幅広く

分布することがわかっている。 R_Γ の PDF は、裾野では指数分布をしており、 $R_\lambda^{1/2}$ による規格化で形が不変になっている (R_λ は、テイラーマイクロスケール λ に基づくレイノルズ数) [2, 3, 5]。そこで、バーガース半径 r_B は一定とみなして、長さは r_B で規格化することにし、渦レイノルズ数 R_Γ については、その PDF $P(R_\Gamma)$ で平均をとる。

$$\langle (\Delta v_\ell)^p \rangle = \int_0^\infty \langle (\Delta v_\ell)^p \rangle_{\text{vol}} P(R_\Gamma) dR_\Gamma \quad (10)$$

ここで $P(R_\Gamma)$ を決める必要が生じる。まず、渦レイノルズ数の期待値 $\langle R_\Gamma \rangle$ を見積もるために、 $\sigma = v_{\text{rms}}/\lambda$ と $\langle \Gamma \rangle = 2\pi r_B v_{\text{rms}}$ の2つの仮定を提案する。ただし、 σ は軸方向のストレイン率 (バーガース渦では $\sigma = 2a$)、 v_{rms} は2乗平均速度である。その結果、一様等方場において、 $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ をコルモゴロフ長として、 $r_B/\eta = 2(15)^{1/4} \simeq 3.9$ 、 $\langle R_\Gamma \rangle / R_\lambda^{1/2} = 4\pi$ が得られる。これらは Jimenéz らによる DNS の解析結果と良く一致している [2]。一方、 R_Γ の PDF を

$$P(R_\Gamma) = \frac{C^3}{2} R_\Gamma^2 \exp(-CR_\Gamma), \quad C = (3/4\pi) R_\lambda^{-1/2} \quad (11)$$

とガンマ分布の形で与えると、特に $R_\Gamma \rightarrow 0, \infty$ で、DNS [2] や実験 [5] で得られている PDF とほぼ同じ形となり、平均値も先の見積もりと同じ値 $\langle R_\Gamma \rangle = \int R_\Gamma P(R_\Gamma) dR_\Gamma = 4\pi R_\lambda^{1/2}$ を与える。この PDF (11) で R_Γ の平均 (10) をとることにより、ストレイン渦の一様等方分布の最終的な統計法則が得られる。図3と図4に $R_\lambda = 2000$ での構造関数、図5にそのスケーリング指数を示す。DNS や実験に良く合った異常スケーリングが得られることがわかる。

低次の統計法則の詳細は次のようになっている。まず、2次構造関数 $S_2(s)$ を慣性領域で $C_2(\varepsilon s)^{2/3}$ にフィットさせて $C_2 \sim 1.4$ が得られるので、コルモゴロフ定数 $\simeq 55 C_2/72$ は約 1.07 となり、実験で知られている値 1.5 からそう逸脱していない。次に、歪度 $S = \lim_{s \rightarrow 0} S_3(s)/S_2(s)^{3/2}$ と尖度 $F = \lim_{s \rightarrow 0} S_4(s)/S_2(s)^2$ を求めてみると、このモデル場は $R_\lambda = 2000$ で $S = -0.27$, $F = 6.2$ を与える。歪度の絶対値は小さめであるが、尖度は実験値にほぼ一致している。最後に、絶対値縦速度差に対する構造関数 $\langle |\Delta v_\ell|^p \rangle$ の低次スケーリング指数に関して、解析的に得られている Constantin の条件を確認する [14]。これは、 $\zeta_3 = 1$ の乱流場に対して $\zeta_1 \geq \zeta_2/2 \geq 1/3$, $\zeta_4 < 4/3$ と与えられているが、今回 $R_\lambda = 2000$ において得られた $\zeta_1 = 0.436 \pm 0.005$, $\zeta_2 = 0.75 \pm 0.01$, $\zeta_3 = 0.98 \pm 0.02$, $\zeta_4 = 1.14 \pm 0.03$ という値は、この条件を満たしていることがわかる。

3.5 PDF の計算

単位体積確率空間を、距離 s の縦速度差 $\Delta v_\ell = x$ (一定) の面が切る断面積は、 s に依存した Δv_ℓ の PDF となる。これを $P_s(x)$ とおくと、 p 次構造関数 S_p は積分 $S_p(s) = \int x^p P_s(x) dx$ であらわされる。本研究のモデル場では、この PDF は

$$P_s(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \int \int \int \int_{x \leq \Delta v_\ell(s) \leq x + \delta x} \frac{\sin \zeta d\zeta d\phi}{4\pi} \frac{2\pi r dr}{\pi r_0^2} P(R_\Gamma) dR_\Gamma \quad (12)$$

で与えられる。図 6 に、それぞれ 3 つの異なる距離 s での、2 乗平均値で規格化した縦速度差の PDF を示す。すべて指数分布であり、慣性領域から粘性領域に入るに従い、よりガウス分布から離れていくことがわかる。この点からも、ストレイン渦による統計モデルは、乱流場の間欠性を良く捉えていると言える。

4 まとめ

本研究の結果は以下のようにまとめられる。

1. 半径 r_B と循環 Γ が一定な 1 本のバーガス渦の、半径 $2 \sim 3 r_B$ の有限領域内での一様等方分布が与える任意次数の構造関数は、慣性領域に対応するスケーリング領域を持つ。
2. 特に、3 次構造関数は、同じ領域内で平均したエネルギー散逸率 ϵ を用いて、コルモゴロフの 4/5 法則と一致する。これは渦レイノルズ数 $R_\Gamma = \Gamma/\nu$ に依存しない性質である。
3. さらに、DNS や実験で得られているワームの統計分布を考慮して、半径は固定し ($r_B \simeq 4\eta$)、循環に関しては $R_\Gamma/R_\lambda^{1/2}$ がガンマ分布するとして平均すると、高次構造関数の異常スケーリングや、速度差 PDF の指数分布などの、乱流場の性質を良く再現する。
4. 粘性領域と慣性領域を分離するスケールは、コルモゴロフ長 η というよりは、乱流場中のワーム構造の代表的な半径であることが示唆できる。
5. 乱流場における、高次構造関数の異常スケーリングや、短い距離での速度差 PDF の指数分布は、ワーム構造の循環の確率分布のみによってコントロールされている可能性が大きい。

参考文献

- [1] A. Vincent and M. Meneguzzi, *J. Fluid Mech.* **225**, 1 (1991).
- [2] J. Jimenéz, A. A. Wray, P. G. Saffman, and R. S. Rogallo, *J. Fluid Mech.* **255**, 65 (1993); J. Jimenéz and A. A. Wray, *CTR Annual Res. Briefs*, 287 (1994).
- [3] M. Tanahashi, T. Miyauchi, and J. Ikeda, in *The 11-th Symp. on Turbulent Shear Flows*, 4017 (1997).
- [4] I. Hosokawa, S. Oide, and K. Yamamoto, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66**, 2961 (1997); 生出伸一, 細川巖, 山本稀義, *ながれ* **17**, 28 (1998).
- [5] F. Belin, J. Maurer, P. Tabeling, and H. Willaime, *J. de Phys. II France* **6**, 573 (1996).
- [6] N. Hatakeyama and T. Kambe, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1257 (1997).
- [7] A. N. Kolmogorov, *C. R. Acad. Sci. URSS* **30**, 301 (1941); *ibid.* **32**, 16 (1941).
- [8] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995), Sect. 6.2.
- [9] Z. -S. She and E. Leveque, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336 (1994); B. Dubrulle, *ibid.* **73**, 959 (1994); Z. -S. She and E. C. Waymire, *ibid.* **74**, 262 (1995).
- [10] G. Stolovitzky, K. R. Sreenivasan, and A. Juneja, *Phys. Rev. E* **48**, 3217 (1993).
- [11] F. Belin, P. Tabeling, and H. Willaime, *Physica D* **93**, 52 (1996).
- [12] R. Friedrich and J. Peinke, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 863 (1997); *Physica D* **102**, 147 (1997).
- [13] J. M. Burgers, *Adv. in Appl. Mech.* **1**, 171 (1948).
- [14] P. Constantin, *SIAM Rev.* **36**, 73 (1994); P. Constantin and C. Fefferman, *Nonlinearity* **7**, 41 (1994).

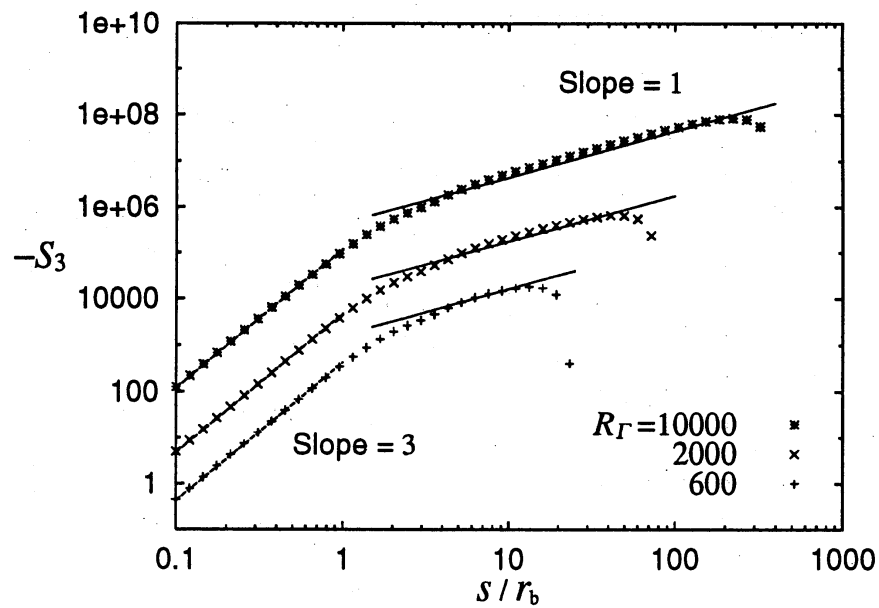


図 1: 渦レイノルズ数 $R_T = 600, 2000, 10000$ における、3 次構造関数に -1 を乗じた $-S_3(s)$ を示す。傾き 1 の実線は、コルモゴロフの 4/5 法則 (3) をあらわす。なお、図 1、3、4 では、構造関数を動粘性係数 ν とバーガース半径 r_B で規格化している。

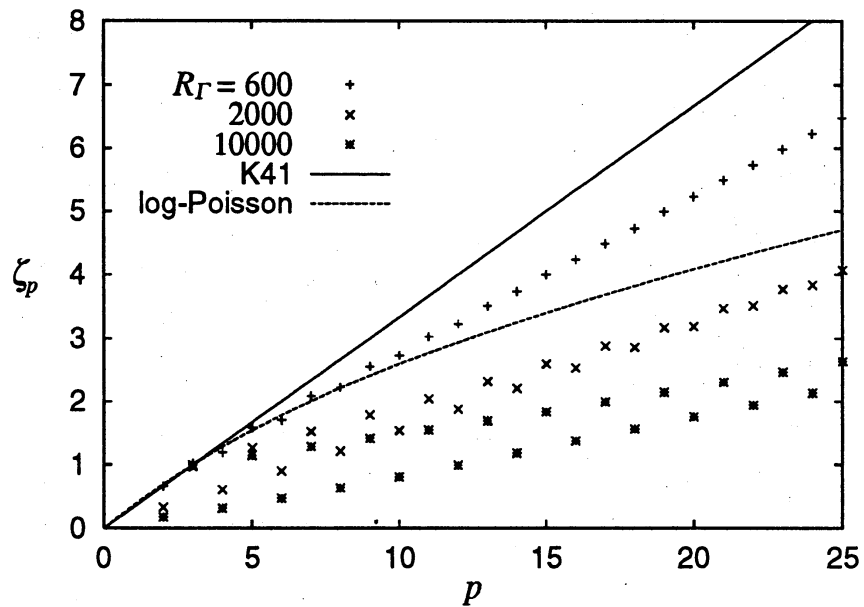


図 2: $R_T = 600, 2000, 10000$ における、構造関数のスケーリング指数 ζ_p 。実線は K41 (4)、点線は SL モデル (5) をあらわす。

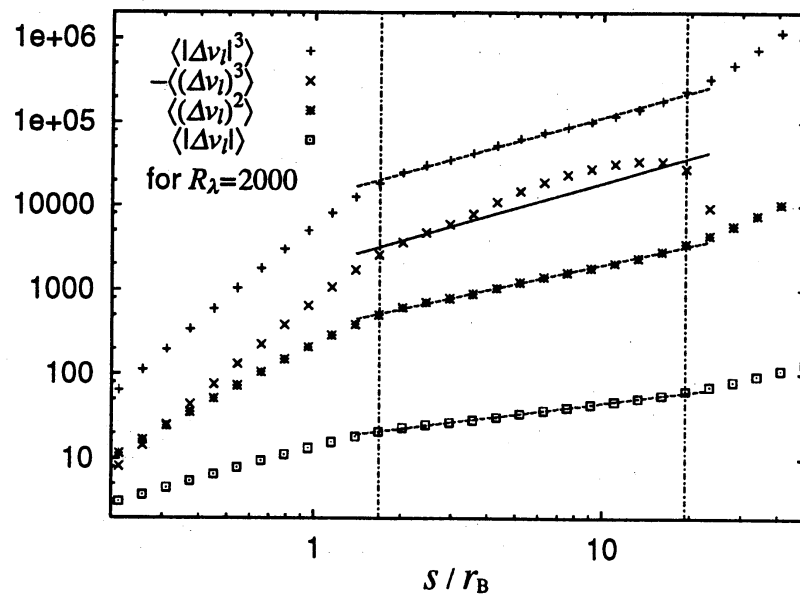


図 3: $R_\lambda = 2000$ における 1 次から 3 次までの構造関数。実線はコルモゴロフの 4/5 法則 (3) をあらわす。3 次構造関数と 4/5 法則 との分散が最小となる領域を慣性領域と定義している (2 本の垂直な一点鎖線間)。鎖線は、慣性領域内での、両対数最小 2 乗法によるフィッティング。

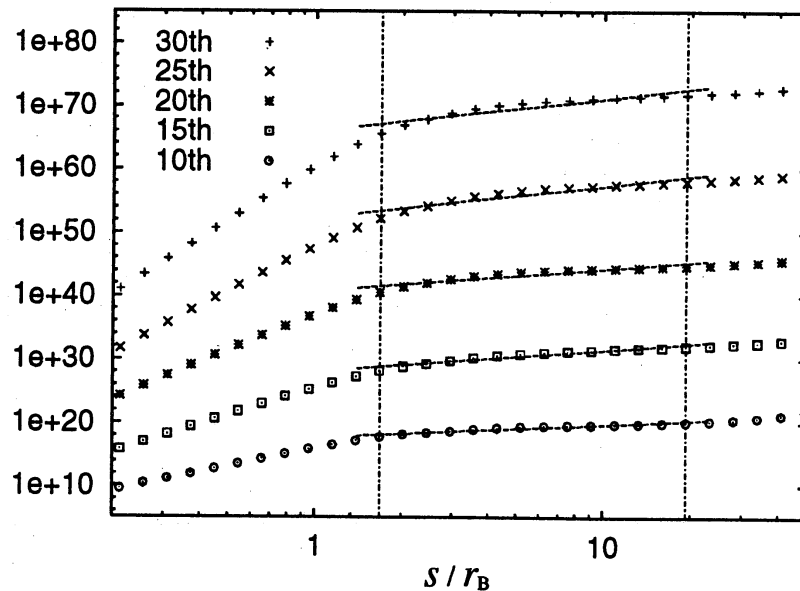


図 4: $R_\lambda = 2000$ における高次構造関数。鎖線は、その慣性領域内でのフィッティング。

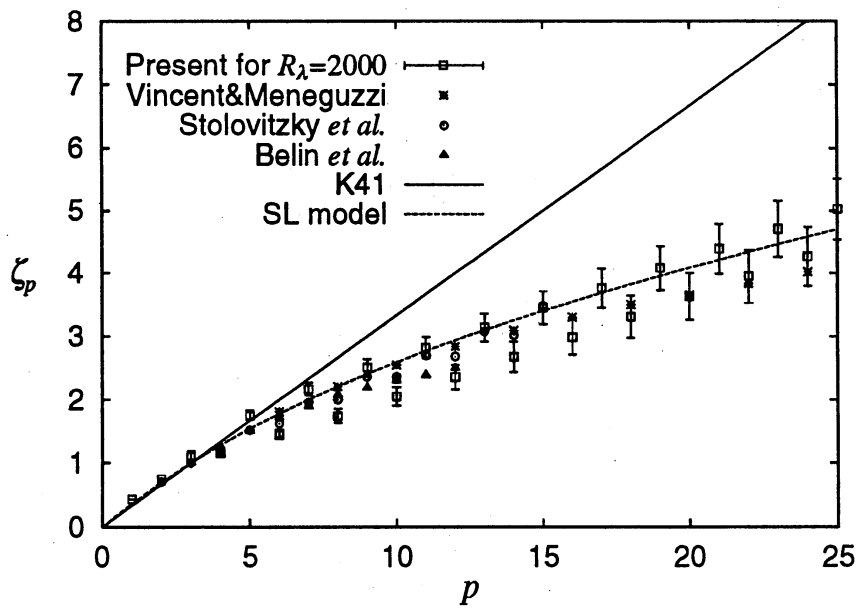


図 5: 構造関数のスケーリング指数 ζ_p 。このモデル ($R_\lambda = 2000$) と、DNS ($R_\lambda = 200$) [1]、風洞実験 ($R_\lambda = 200$) [10]、低温ヘリウムガスによる実験 ($R_\lambda = 2000$) [11]、K41 [7]、SL モデル [9] との比較を示す。

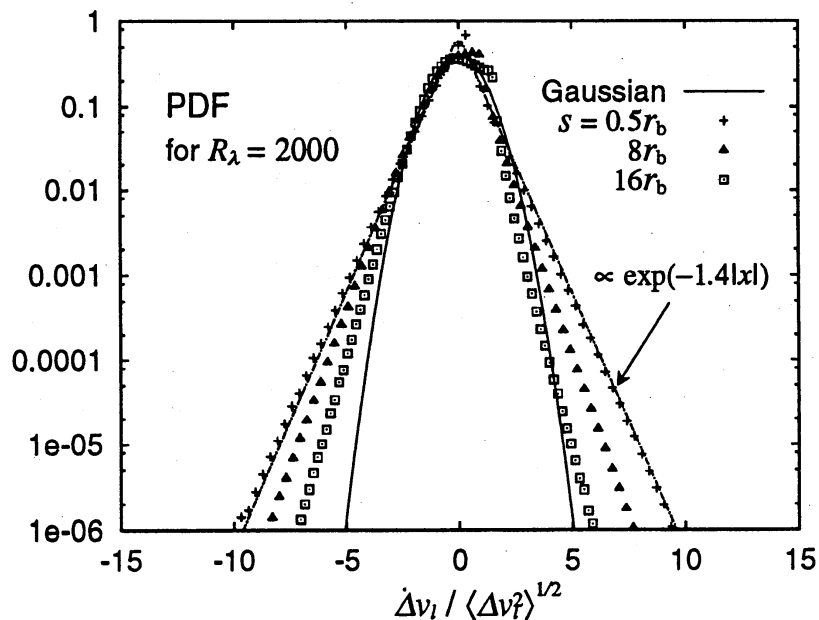


図 6: 長さスケール $s = 0.5 r_B$ (粘性領域) と $s = 8 r_B, 16 r_B$ (慣性領域) における、2 乗平均値で規格化した縦速度差の PDF。