

Exotic characteristic classes について.

京大 数研 西田 吾郎

§ 1 序

Fibre が球面とホモトピー同値であるような fibre space は spherical fibre space とよばれる。Spherical fibre space に対して、vector bundle と同様に classifying space BSF が存在することが知られている。従ってその特性類を決定する事は、 $H^*(BSF; G)$ を決定する事と同値である。ここに G は係数群である。 G が位数 p の素体 $\mathbb{F}_p$ の場合は、最近 土屋 [] によって、その Hopf algebra 構造が決定された。特性類を定義する方法はいくつかあるが、その一つは cohomology operation を用いる Thom-Wu の方法である。 ξ を底空間 X 上の spherical fibre space, $T\xi$, $J\xi$, $\phi\xi$ をそれぞれ ξ の Thom 複体 Thom 類 Thom 同型とする。 p^n を Steenrod の reduced p -power とするとき

$$\xi_n = \phi_{\xi}^{-1}(p^n(\bar{\xi})) \in H^{2n(p-1)}(X, \mathbb{Z}_p)$$

は Wu 特性類とよばれる。ただし p は奇素数。この時 Peterson-Toda [] によって次の事が知られている。

$$H^*(B_{SF}, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\xi_n] \otimes \Lambda(\beta \xi_n) \otimes C$$

ここに β は Bockstein 作用素、 C はある Steenrod 環上の Hopf algebra である。(従って、 C は Thom 類の上の primary cohomology operation では定義できない。)

ここでは、 C のある元を secondary cohomology operation で定義する F. P. Peterson [] の方法及びこれに関連した注意を述べる。

§ 2 Algebraic bundle

A を $\mathbb{Z}_p$ 上の cocommutative, coassociative, connected graded Hopf algebra とする。又 R を graded A -algebra with unit で次の条件をみたすものとする。ただし p は素数。

$$a(1) = 0 \quad \text{if } \deg(a) > 0.$$

定義. $\xi: A \rightarrow R$ (linear map) は次の条件をみたすとき R 上の A -bundle とよばれる。

$$(1) \quad \xi(1) = 1$$

$$(2) \quad \xi(ab) = \sum (a' \otimes b')^{|\alpha'| + |\beta'|} a' \xi(b) \cdot \xi(a'')$$

ここに $\psi(a) = \sum a' \otimes a''$ は diagonal map, $|a| = \deg a$,

(2)

A, R を上述の通りとする。 A と R の semi tensor 積 $R \odot A$ とは、 vector space としては $R \otimes A$ と同型であって、その積は、 $(m \otimes a) \cdot (n \otimes b) = \sum (-1)^{|a'| |n|} m \cdot a'(n) \otimes a''b$ で与えられる。 今 R 上の A -bundle ξ が与えられた時、 θ_ξ を

$$A \xrightarrow{\psi} A \otimes A \xrightarrow{\xi \otimes 1} R \otimes A \cong R \odot A$$

で定義する。 又 ξ の "negative" ξ^* を次の方法で帰納的に定義した A から R への linear map とする。

$$\xi^*(1) = 1, \quad \sum \xi^*(a') \cdot \xi(a'') = 0 \quad \text{for } \psi(a) = \sum a' \otimes a''.$$

定理1. θ_ξ は algebra の homomorphism である。

定理2. $\xi^*; A \rightarrow R$ は R 上の A -bundle である。

1 は、 A の coassociativity と $R \odot A$ の定義から容易に確かめられる。 定理2 も、複雑ではあるが、直接的な計算によって証明できる。

注意. ξ^* が ξ の negative である理由は次の通りである。

今 二つの R 上の A -bundle ξ, η が与えられた時、 ξ と η の Whitney 和 $\xi \oplus \eta$ を

$$A \xrightarrow{\psi} A \otimes A \xrightarrow{\xi \oplus \eta} R \otimes R \xrightarrow{\text{product}} R$$

と定義すると、 $\xi \oplus \eta$ も R 上の A -bundle となる。 又

$\varepsilon; A \rightarrow R$ を $\varepsilon(1) = 1$ $\varepsilon(a) = 0$ if $\deg a > 0$ とすれば、 ε も R 上の A -bundle であって、 次の事実が成り立つ。

R 上の A -bundle ξ に対して, $\xi \oplus \xi^* = \varepsilon$.

§3. exotic characteristic class の定義.

この節では, A として, mod p Steenrod algebra A_p , R としては, $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ をとる. ξ を底空間 X 上の, stable spherical fibre space とする. このとき, $A = A_p$ から $R = H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ への linear map ξ を 等式 $a(U_\xi) = \xi(a) \cup U_\xi$ で定義する. こゝに $a \in A_p$, U_ξ は ξ の Thom 類である.

定理3. $\xi: A_p \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ は $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ 上の A_p -bundle

(証明) $\xi(1) = 1$ は 明らか.

$$\begin{aligned} \xi(ab) \cup U_\xi &= ab(U_\xi) = a(\xi(b) \cup U_\xi) \\ &= \sum (-1)^{|a''||b|} a'(\xi(b)) a''(U_\xi) = \sum (-1)^{|b||a''|} a'(\xi(b)) \cdot \xi(a'') \cup U_\xi \end{aligned}$$

従つて, (2) も成り立つ。

定理4. ξ を上の通りとし, ξ^* をその negative とする. このとき, $A_p \ni a$, $H^*(X; \mathbb{Z}_p) \ni x$ に対して,

$$\theta_{\xi^*}(a)(x \cup U_\xi) = a(x) \cup U_\xi$$

特に $\deg a > 0$ ならば, $\theta_{\xi^*}(a)(U_\xi) = 0$.

(証明) ξ は stable であるから, $\deg U_\xi$ は even であるとしてよい. A_p の coassociativity と ξ^* の definition より,

$$\begin{aligned} \theta_{\xi^*}(a)(x \cup U_\xi) &= \sum \xi^*(a')(a'')(U_\xi) \cdot (a'')''(x) \\ &= \sum \xi^*(a') \xi((a')'') U_\xi \cdot a''(x) = a(a) \cup U_\xi. \end{aligned}$$

従って Thom 類の上への "twisted" な primary operation は常に trivial であり, Thomas [] の方法により, twisted な secondary operation が定義できる。Thomas の方法は、長々しいが、universal example を用いる標準的なものであるから、略して結果だけ述べる事にする。

今 $f; Y \rightarrow X$ を topological spaces とその continuous map とし, $B \subset Y$ とする。 f^* によって $H^*(Y, B; \mathbb{Z}_p)$ は $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ -module であり, 従って $H^*(X; \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$ -module である。 $\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} = \sum a_i \cdot \beta_i = 0 \in (H^*(X; \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p)^{\mathbb{Z}+1}$ を一つの relation とする。このとき、

定理5. 次のような (twisted) secondary operation $\Phi_{\alpha, \beta}$ が存在する。

$$\Phi_{\alpha, \beta}; H^*(Y, B) \cap (\cap \ker \beta_i) \longrightarrow H^{*+b}(Y, B) / \sum \text{Im } \alpha_i.$$

さて、 ξ を X 上の $(n-1)$ -spherical fibre space, (Y, B) を ξ の Thom 複体とする。 $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum a_i \cdot b_i = 0 \in (\mathbb{Q}_p)^{\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{Q}_p$ の relation とすると、 $\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} = \theta_{\xi^*}(\underline{a}) \cdot \theta_{\xi^*}(\underline{b}) = 0$ は定理1により、 $H^*(X; \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$ の relation である。従って、定理4, 定理5より、次のような operation を得る。

$$\Phi_{a, b}^{\xi^*}; H^*(T_{\xi}) \longrightarrow H^{*+b}(T_{\xi}) / \sum \text{Im } \theta_{\xi^*}(a_i).$$

特別の場合として $\Phi_s^{\bar{s}}$ を次の relation で定義される

twisted secondary operation とする。 ($P: \text{odd}$ の場合)

$$p^{P^s-(P-1)} p^{P^s-1} + \sum_{i=1}^{P^s-L-1} \lambda_i p^{P^s-i} p^i = 0. \quad (*)$$

定理6. $\Phi_s^{\bar{s}}$ は Indeterminacy を持たない。

証明は容易である。さて、以上の事から (secondary) なる exotic characteristic class e_s は次の様に定義される。

定義. $e_s(\bar{s}) = \phi_s^{-1} \Phi_s^{\bar{s}}(U_{\bar{s}}) \in H^{2P^s(P-1)-1}(X; \mathbb{Z}_p)$

定理7. $\bar{s}$ を BSp 上の universal fibre space とする。このとき、 $e_s(\bar{s}) \neq 0$. (Gitler-Stasheff)

注意1. 今 $a \cdot b = 0$ を A_p の relation とする。 $\bar{s}$ を X 上の spherical fibre space で、 $U_{\bar{s}} \in \bigcap \ker b_i$ なるものとする。従って、 $U_{\bar{s}}$ に通常の secondary operation $\Phi_{a,b}$ が定義できる。この時、一般には、 $\Phi_{a,b}(U_{\bar{s}}) \neq \Phi_{a,b}^*(U_{\bar{s}})$ である。その例として、 $\bar{s}$ を $\pi_4(BSO) \cong \mathbb{Z} \times 2\text{-generator}$ に対応する S^4 上の vector bundle とする。又、relation としては、

$S_8^1 S_8^4 + S_8^2 S_8^3 + S_8^4 S_8^1 = 0$ をとる。この時、 $\Phi(U_{\bar{s}}) \neq 0$ であり、 $\Phi^*(U_{\bar{s}}) = 0$ である。実際、 $\Phi^*(U_{\bar{s}})$ は $\bar{s}$ の特性類であり、 $\bar{s}$ は vector bundle であるから、 $\Phi^*(U_{\bar{s}})$ は Stiefel-Whitney 類の多項式である。しかるに、 $\bar{s}$ の S-W 類は明らかにすべて 0 である。従って $\Phi^*(U_{\bar{s}}) = 0$.

しかしながら Q_s を定義する secondary operation Φ_s^3 に対しては $\Phi_s^3 \neq \Phi_s$ かどうかは わからない。ただし Φ_s は Φ_s^3 と同じ relation に対応する untwisted な secondary operation である。次の注意に示すように もし $\Phi_s^3 = \Phi_s$ ならば $Q_s \neq 0$ が 証明できる。

注意2. [1] の方法によって 次のような finite CW complex K_s とその上の spherical fibre space ξ_s を構成する事ができる。 $\beta_i(\xi_s) = 0$ ただし $i < p^s$, $\beta_{p^s}(\xi_s) \neq 0$ 従って Thom 類 U_s 上に Φ_s が定義できて $\Phi_s(U_s) \neq 0$.

参考文献.

- [1] F.P. Peterson; Twisted cohomology operations and exotic characteristic classes. to appear.
- [2] F.P. Peterson - H. Toda; On the structure of $H^*(B\mathbb{F}; \mathbb{Z}_p)$. J. of Math. Kyoto Univ. (1967).
- [3] E. Thomas; Postnikov invariants and higher order cohomology operations
- [4] H. Toda; Extended p -th powers of Complexes and applications to homotopy theory. Proc of Japan Academy vol 44. (1968)

- [5] A Tsuchiya, Characteristic classes for spherical fibre space. to appear.