

## Loop-order について

阪大 教養 野村泰敏

位相空間  $X$  の閉道空間を  $\Omega X$  とする。ホモトピー集合  $[\Omega X, \Omega X]$  における恒等写像のホモトピー類  $1_{\Omega X}$  の位数を  $X$  の loop-order と呼び  $l(X)$  で表わす。この概念は戸田氏の suspension-order の双対として菅原氏 [3] によって導入され、そこでその一般的性質が論ぜられた。就中、ファイバー写像  $F \rightarrow E \rightarrow B$  に対しては  $l(E) \mid l(B) \cdot l(F)$  が示されている。ここでは、Eilenberg-MacLane 複体よりホスト=コフ構成で得られる 2-stage 及び 3-stage の空間に対して愛知教育大の古川靖邦氏と共に得た結果について述べる。

### 1. 主結果

$K_n$  を Eilenberg-MacLane 複体  $K(\mathbb{Z}_p, n)$  (ただし  $p$  は素数) とする。mod  $p$  の Steenrod 代数  $\mathcal{A}(p)$  の次元  $n$  の元  $\alpha$  に対して, diagonal map  $\psi$  による  $\alpha$  の像が

$$\psi(\alpha) = \alpha \otimes 1 + \alpha_1 \otimes \beta_1 + \cdots$$

とかかれるとき (たゞし  $\beta_1$  は  $Z_p \rightarrow Z_{p^2} \rightarrow Z_p$  に對する Bockstein 作用素とす),  $\tilde{\alpha} = (-1)^{n+1} \alpha_1$  とおく。  $\sim$  は Kristensen derivation と呼ばれ  $\widetilde{S_g^n} = S_g^{n-1}$  ( $n \geq 1$ ),  $\tilde{\beta}_1 = 1$ ,  $\tilde{p}^i = 0$  ( $i \geq 0$ ) をみたす (cf. Larmore-Thomas [1], Smith [2]).

さて  $\mathcal{O}(p)$  の元  $\theta_j, \delta_i$  に對して

$$\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_\ell\} : K_n \rightarrow \bigoplus_{j=0}^{\ell} K_{n+r_j}, \quad r > 0, 0=r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_\ell, \\ n \geq r+r_\ell+3$$

$$\sum_{i=0}^k \pi_i^* \gamma_i : \bigoplus_{i=0}^k K_{n+\rho_i} \rightarrow K_{n+r}, \quad s_k < r, 0=\rho_0 \leq \rho_1 \leq \dots \leq \rho_k, \\ n \geq r+3$$

により可縮な path-space から誘導されるファイバー空間を  $E_1, E_2$  と記す。ここで  $\pi_i$  は  $i$  因子への射影を表わす。

定理 A  $l(E_1)=p^2$  とする充分条件は、或る  $j$  に對して

$$\tilde{\theta}_j \notin \sum_{i=0}^{j-1} \mathcal{O}(p) \theta_i$$

定理 B  $l(E_2)=p^2$  とする充分条件は、或る  $i$  に對して

$$\tilde{\delta}_i \notin \sum_{j=i+1}^k \gamma_j \mathcal{O}(p)$$

系 1  $\theta \in \mathcal{O}(p)$ ,  $\deg \theta = r$ ,  $r > 0$ ,  $n \geq r+3$  とする。  $\theta$  のファイバー  $E$  の loop-order  $l(E)$  が  $p^2$  とするための条件は  $\tilde{\theta} \neq 0$ 。

系 1 は L. Smith [2] の Theorem 1.3 と同等である。  $\sim$  の族に属する  $\mathcal{O}(2)$  の元として  $S_g(3k) + \sum_{i=1}^k S_g(3k-i, i)$  ( $k \geq 1$ ),  $S_g(6k+1) + S_g(6k, 1) + \sum_{i=1}^k S_g(6k+1-2i, 2i) + \sum_{j=2}^{2k} S_g(6k-j, j, 1)$  ( $k \geq 1$ ) 等がある (ここで  $S_g^{i_1} S_g^{i_2} \dots S_g^{i_k}$  を  $S_g(i_1, \dots, i_k)$  と略記)。

次に 3-stage および  $\sigma = \sigma \circ \tau$  構成

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega L & \xrightarrow{j} & E & & \\
 & & \downarrow \pi & \searrow \theta & \\
 \Omega B & \xrightarrow{\ell} & K & \xrightarrow{\theta} & L \\
 & & \downarrow \rho & & \\
 & & A & \xrightarrow{\alpha} & B
 \end{array}$$

(\*)

$$A = K_n, B = \bigwedge_{i=0}^m K_{n+r+r_i}, L = K_{n+s}, r > 0, n \geq s+s, s \geq r+r_m$$

$$d = \{d_0, \dots, d_m\}, d_i \in \mathcal{O}(p), \deg d_i = r+r_i$$

$$\beta = \theta \ell = \sum_{i=0}^m (\Omega \pi_i)^* \beta_i, \beta_i \in \mathcal{O}(p), \deg \beta_i = s-r-r_i+1$$

$$r_0 = 0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_m$$

$K$  および  $E$  はそれぞれ  $d, \theta$  の  $\tau$  1 バ

を考へる。関係  $\sum_{i=0}^m [\tilde{\beta}_i \cdot d_i + (-1)^{s-r-r_i+1} \beta_i \cdot \tilde{\alpha}_i] = 0$  に随伴する

2次の作用素を

$$\begin{aligned}
 \psi: \bigcap_{i=0}^m (\text{Ker } d_i \cap \text{Ker } \tilde{\alpha}_i) &\rightarrow H^{n+s-2}(\cdot; \mathbb{Z}_p) / \mathcal{L} \\
 \mathcal{L} &= \sum_{i=0}^m [\beta_i \cdot H^{n+r+r_i-3}(\cdot; \mathbb{Z}_p) + \tilde{\beta}_i \cdot H^{n+r+r_i-2}(\cdot; \mathbb{Z}_p)]
 \end{aligned}$$

と記す。

定理 C 1)  $\forall i, \tilde{\alpha}_i \in \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{O}(p) \alpha_k, \exists j, \tilde{\beta}_j \notin \sum_{k=j+1}^m \mathcal{O}(p)$  ならば

$$\ell(E) = p^2.$$

2)  $\forall i, \tilde{\alpha}_i \in \sum_{k=0}^{i-1} \mathcal{O}(p) \alpha_k, \deg \beta_m > 1$ , かつ

$$\begin{aligned}
 \psi(\Omega \rho) &\not\equiv 0 \pmod{\sum_{i=0}^m [\beta_i \cdot H^{n+r+r_i-3}(\Omega K; \mathbb{Z}_p) + \tilde{\beta}_i \cdot H^{n+r+r_i-2}(\Omega K; \mathbb{Z}_p)]} \\
 &\quad + (\Omega \rho)^* H^{n+s-2}(\Omega A; \mathbb{Z}_p)
 \end{aligned}$$

ならば  $\ell(E) = p^2$ .

3)  $\forall i, \tilde{\alpha}_i \in \sum_{k=0}^{i-1} \sigma(p) \alpha_k, \forall j, \tilde{\beta}_j \in \sum_{k=j+1}^m \beta_k \sigma(p), \deg \beta_m > 1$   
 かつ  $(\Omega \rho)^* H^{n+s-2}(\Omega A; \mathbb{Z}_p) \subset \sum_{i=0}^m \beta_i H^{n+r+r_i-3}(\Omega K; \mathbb{Z}_p),$   
 $\psi(\Omega \rho) \equiv 0 \pmod{\sum_{i=0}^m \beta_i H^{n+r+r_i-3}(\Omega K; \mathbb{Z}_p)}$

ならば  $\ell(E) = p$ .

4)  $\exists i, \tilde{\alpha}_i \notin \sum_{k=0}^{i-1} \sigma(p) \alpha_k, (\Omega \rho)^* H^{n+s-2}(\Omega A; \mathbb{Z}_p) \subset$   
 $\sum_{k=0}^m \beta_k H^{n+r+r_k-3}(\Omega K; \mathbb{Z}_p)$  ならば  $\ell(E) = p^2$ .

系 2.  $\exists i, \tilde{\alpha}_i \notin \sum_{k=0}^{i-1} \sigma(p) \alpha_k$  かつ  $\sigma(p)$  の次数  $s-1$  の部分  
 が  $\sum_{k=0}^m \beta_k \sigma(p) + \sum_{k=0}^m \sigma(p) \alpha_k$  に含まれるならば  $\ell(E) = p^2$ .

系 3  $\forall i, \tilde{\alpha}_i \in \sum_{k=0}^{i-1} \sigma(p) \alpha_k, \forall j, \tilde{\beta}_j \in \sum_{k=j+1}^m \beta_k \sigma(p),$   
 $\deg \beta_m > 1$  かつ  $\sigma(p)$  の次数  $s-1$  の部分が  $\sum_{k=0}^m \beta_k \sigma(p) +$   
 $\sum_{k=0}^m \sigma(p) \alpha_k$  に含まれるならば  $\ell(E) = p$ . とするためには  
 $\forall i, \sigma(p)$  の次数  $s-r-r_i$  の部分が 0 であることが十分であ  
 る。

定理 C の 1) の適用される関係式とは  $(P^k \Delta) P^{p-1} = 0$  ( $2$   
 $\leq k < p$ ),  $(P^p \Delta) P^k + (k-1) \Delta P^{p+k} - (\Delta P^{p+k-1}) P^1 = 0$  ( $1 < k < p$ )  
 がある。系 2 の適用される関係式とは  $S_2^3 S_1' + S_2^2 S_2^2 = 0,$   
 $S_2^8 S_1' + (S_2^2 S_2^3) S_1^4 + S_1' S_2^8 = 0$  等がある。系 3 の適用で主なる関  
 系式とは  $P^{p-1} P^1 = 0$  ( $p > 3$ ),  $P^p P^{p+2} - P^{2p+1} P^1 = 0$  が挙げら  
 れる。関係式  $(\Delta P^{kp}) P^{k-1} - P^{kp} (\Delta P^{k-1}) - (P^{kp-1}) (\Delta P^k) = 0$   
 ( $k \geq 2$ ,  $k \neq 0 \pmod{p}$ ,  $p > 3$ ) は定理 C, 2) の適用で主なる例  
 である。

尚, (\*) の  $E$  は関係  $\beta(\Omega\alpha) = 0$  より定まる二次的作用素の universal example のとり  $\alpha$  が種々あることから, その本元トポ型や loop-order 関係  $\beta(\Omega\alpha) = 0$  から一意には定まらぬこともあり得ることに注意したい.

## 2. 定理の証明

$1_{\Omega X}$  の位数を決定するために次の様な Larmore-Thomas [1] の方法をを用いる.  $\pi: E \rightarrow K$  を  $\theta: K \rightarrow L$  のファイバーとし, 素数  $p$  を固定する. degree  $p^k$  ( $k > 0$ ) の  $S = S^1$  の字像の Puppe 列を

$$S \xrightarrow{p^k} S \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\delta} S^2 \xrightarrow{p^k} \dots$$

とし,  $j: \Omega L \rightarrow E$  を包含字像とすると図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & L^{S^2} \\
 & & & & & & \downarrow p^k \# \\
 & & & & K^{S^2} & \xrightarrow{\theta^{S^2}} & L^{S^2} \\
 & & & & \downarrow \delta \# & & \downarrow \delta \# \\
 & & & & K^P & \xrightarrow{\theta^P} & L^P \\
 & & & & \downarrow i \# & & \downarrow i \# \\
 \Omega L^S & \xrightarrow{j^S} & E^S & \xrightarrow{\pi^S} & K^S & \xrightarrow{\theta^S} & L^S \\
 \downarrow p^k \# & & \downarrow p^k \# & & \downarrow p^k \# & & \\
 \Omega K^S & \xrightarrow{(\Omega\theta)^S} & \Omega L^S & \xrightarrow{j^S} & E^S & \xrightarrow{\pi^S} & K^S
 \end{array}$$

が誘導される. 行及び列はファイバー列となり,  $\#$  は関数空間への誘導字像を意味している.  $K$  及び  $L$  を loop 空間と仮

定しておく。 Larmore-Thomas [1] に従い、関数的作用素

$$\begin{aligned} \Phi_k : [X, K^S] \cap \text{Ker}(p^{k\#})_* \cap \text{Ker } \theta_*^S \\ \longrightarrow [X, L^{S^2}] / \theta_*^S [X, K^S] + (p^{k\#})_* [X, L^{S^2}] \end{aligned}$$

と  $\Phi_k = (g^\#)_*^{-1} \theta_*^P (i^\#)_*^{-1}$  と定義する。\*1節の諸定理の証明の基礎となるのは次の定理である。

定理 次の条件を仮定する：

- 1)  $\ell(K) \mid p^k, \ell(L) \mid p^k$
- 2)  $[\Omega L, \Omega^2 K] = 0, [\Omega^2 L, \Omega^2 K] = 0, [\Omega L, \Omega K] = 0$
- 3)  $Y = \Omega^2 L, \Omega^2 K, \Omega E$  について

$$[\Omega^2 L, Y] \xleftarrow{(\Omega j)^*} [\Omega E, Y] \xleftarrow{(\Omega \pi)^*} [\Omega K, Y] \xleftarrow{(\Omega \theta)^*} [\Omega L, Y]$$

が完全である。

$$\text{このとき} \quad p^{k*} 1_{\Omega E} = -(\Omega j)_* \Phi_k (\Omega \pi)$$

で、 $(\Omega \theta)^* [\Omega L, \Omega^2 L] + (\Omega^2 \theta)_* [\Omega K, \Omega^2 K]$  modulo  $\sim 12$

元  $\Psi_k(E) \in [\Omega K, \Omega^2 L]$  で、 $\Phi_k(\Omega \pi) \equiv (\Omega \pi)^* \Psi_k(E) \text{ mod } (\Omega^2 \theta)_* [\Omega E, \Omega^2 K]$  となるものが unique に存在する。

$$p^{k*} 1_{\Omega E} = 0 \iff \Psi_k(E) \equiv 0 \text{ mod } (\Omega^2 \theta)_* [\Omega K, \Omega^2 K] + (\Omega \theta)^* [\Omega L, \Omega^2 L]$$

証明 # diagram-chasing による。尚、対応

$$\theta \rightarrow \Psi_1(E)$$

は Toda 氏の derivative  $\theta$  ([4], p.209) の双対に相当する事に注意しておく。

前一節の諸定理を証明するためには、それぞれの場合に  $\Psi_k(E)$  を, Kristensen derivation  $\sim$  や, 関係

$$(t\beta^P)(\alpha^Pe) = 0$$

より導かれる二次的作用素に変わると帰着される, たゞし  $t: L^P \rightarrow \Omega^2 L$  は  $g^\#$  に対する射影で,  $e: \Omega A \rightarrow A^P$  は  $i^\#$  に対する injection である. 詳細は [5] で発表の予定である.

## 文 献

- [1] L. Larmore and E. Thomas: Group extensions and principal fibrations, *Math. Scand.* 30 (1972), 227-248.
- [2] L. Smith: Secondary cohomology theories, *Indiana Math. J.* 23 (1974), 899-923.
- [3] M. Sugawara: Order of the identity class of a loop space, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A-1*, 30 (1966), 131-136.
- [4] H. Toda, Algebra of stable homotopy of  $\mathbb{Z}_p$ -spaces and applications, *J. Math. Kyoto Univ.* 11-2 (1971), 197-251.
- [5] Y. Furukawa and Y. Nomura, On the order of a <sup>loop-</sup>fibre space. 準備中.