

境界値の満たす関係について

東大 理 片岡清臣

超関数論に於ける非特性境界値問題については、今迄に小松-河合の境界値の定義に始まって、河合-柏原の楕円型境界値問題の理論と、金子の片側双曲型の場合の可解性等の結果がある。しかし双曲型混合問題等に応用するには少し不十分である。そこで本稿では、境界の余次元 1, 非特性, 単独の場合に限って、ある程度一般論的にできる所を解説する。

§ 1. 層 C_{mix} の定義

M を n 次元実解析的多次様体, N をその余次元 1 の部分多次様体とする。簡単の爲 $M = \mathbb{R}^n \ni (x_1, x')$ $N = \{x_1 = 0\}$ とする。

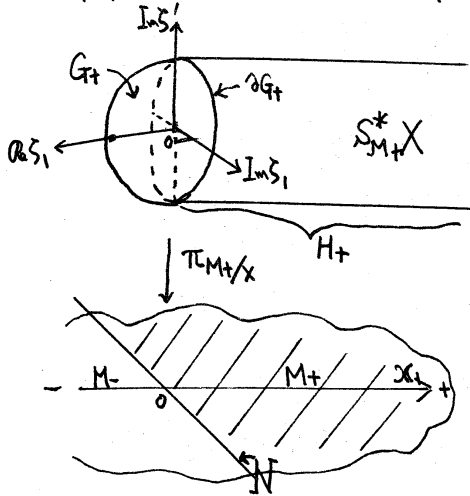
$X = M^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n \ni (z_1, z')$, $Y = N^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{n-1}$, $TX = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z; \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j})$
 $T^*X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (z; \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ として pairing を $-\text{Re}(\sum_{j=1}^n \alpha_j \zeta_j)$ とする。

(従って z に対応する“半分”は $\{\alpha; -\text{Re}(\sum_{j=1}^n \alpha_j \zeta_j) \geq 0\}$ となる。)

$S_{M+}^*X = \{(z, \zeta) \in S_M^*X \mid \text{Re } \zeta_1 > 0\} \cup \{(z, \zeta) \in S^*X \mid z \in N, \text{Re } \zeta \leq 0, \text{Re } \zeta_1 \geq 0\}$

$G_+ = \{(z, \zeta) \in S_M^*X \mid \text{Re } \zeta_1 > 0\}$, $\partial G_+ = \{(z, \zeta) \in S_M^*X \mid \text{Re } \zeta_1 = 0\} = S_M^*X \cap S_N^*X$

$H_+ = S_{M+}^* X \cap S_{M+}^* X = \{ (x, \lambda) \in S_{M+}^* X \mid x_1 \geq 0 \}$ と定義する。



$$\widetilde{M_+ X^*} = (X - M_+) \sqcup S_{M_+}^* X \xrightarrow{\pi_{M_+/X}} X$$

(M_+ を中心とした X の comonoidal 変換.)

$$\widetilde{N X^*} \xrightarrow{\pi_{N/X}} X$$

Def $\mathcal{H}_{S_{M_+}^* X}^g(\pi_{M_+/X}^* \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{H}_{S_N^* X}^g(\pi_{N/X}^* \mathcal{O}_X)$ はそれぞれ $g = n$ だけ残るので, $C_{M_+|X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{S_{M_+}^* X}^n(\pi_{M_+/X}^* \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M_+/X}$,

$$C_{N|X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{S_N^* X}^n(\pi_{N/X}^* \mathcal{O}_X) \otimes \omega_{N/X}$$

とおく。これらはすべて座標不変に定義される。

($C_{N|X}$ は河合-柏原によって既に導入されている。)

命題 1. $I_{M_+} B_M|_N \cong \pi_{M_+/X}^* C_{M_+|X}|_N$, $C_{M_+|X}|_{x_1 > 0} = C_M|_{x_1 > 0}$.

$C_{M_+|X}|_{G_+} = C_{N|X}|_{G_+}$, $0 \rightarrow I_N B_M \rightarrow \pi_{N/X}^* C_{N|X} \rightarrow \mathcal{O}_X|_N \rightarrow 0$ (完全).

従って問題なのは G_+ 上であるが, 次の成立する。

命題 2. $C_{N|X}|_{G_+} \xrightarrow{i'} C_{M_+|X}|_{G_+} \xrightarrow{i} I_{H_+} C_M|_{G_+}$ という自然な

写像 i, i' があり, i' は $(S_{M_+}^* X \cap G_+)$ を除いて単射ということがわかっている。(i も単射である事が予想されている。)

そして自然に $C_{M_+|X}$, $C_{N|X}$ は $\mathcal{F}_X$ -module になっている。

命題 3. $C_{N|X}$ (G_+ では $C_{M_+|X}$ も同じだが) は, $S_{M_+}^* X - S_{M_+}^* X \ni (x', z_1, \lambda')$ ($\lambda' \neq 0$). とするとある対応により (自然ではないが) x' と z_1

を変数とする microfunction で, λ を正則パラメータとするものと同一視される為, 特に λ について一意接続性が成立する。

そしてそれの ∂G_+ までの一般化として,

$$\lambda(I_{H+} C_{M+1X}|_{\partial G_+}) = 0 \quad \text{が成立する。}$$

§ 2. 小松-河合の境界値

$P(x, D_x)$ を m 階微分作用素で, N は非特性とする。

$u(x)$ を $\{x_1 > 0\}$ での超関数解 (N に近い所で定義されていれば

よい。) とすると, $\exists \tilde{u}(x) \in I_{H+}(B_M), \exists f_0(x'), \dots, f_{m-1}(x') \in B_N$

s.t. $\tilde{u}|_{x_1 > 0} = u, \quad P\tilde{u}(x) = f_0(x')\delta(x_1) + \dots + f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$

($f_0, \dots, f_{m-1}$ を小松-河合の境界値という。)

そこで u を考える代りに $\tilde{u}$, 又は $(f_0, \dots, f_{m-1})$ を考える事ができる。ところで $u(x) \rightarrow (f_0, \dots, f_{m-1})$ の対応は 1:1 であるが

P が双曲型の場合を除けば一般に onto ではない。そこでこの image を決める事が重要であるが, Cauchy-Kowalevsky の定理より, a での Cauchy 問題の可解性があるので, その image に対する条件は $B_N^m/a_N^m \cong \pi_* C_N^m$ に対する条件になる。

そこでこの問題に C_{M+1X} を応用する。まず $\tilde{u}(x) \in I_{H+} B_M|_N$ という事から $\tilde{u}$ は C_{M+1X} の S_{M+1X}^* 上の section と同一視できる。また, $F = f_0(x')\delta(x_1) + \dots + f_{m-1}(x')\delta^{(m-1)}(x_1)$ も C_{M+1X} の section. 又はより厳密に C_N の section と同一視できる。よって $P\tilde{u}(x) = F(x)$ という方程式は, $\bar{G}_+ = G_+ \cup \partial G_+$ 上での C_{M+1X}, C_N の section 間

の方程式として捉えられる。 $\overline{G}_+ \setminus \{\sigma_m(p)=0\}$ では $\tilde{u} = P^+ F \alpha$ として定まり問題はないが、さらに $\tilde{u}$ が $\{\sigma_m(p)=0\} \cap \overline{G}_+$ までも $C_{M+1}X$ の section として拡張される ($P\tilde{u} = F$ を満たしながら) 為には、 $(f_0, \dots, f_{m-1})$ が任意では一般にはだめである。しかし $G_+ \cap \{\sigma_m(p)=0\}$ までの拡張される為の必要十分条件は、完全にわかり、 $f_0, \dots, f_{m-1}$ の間の $\pm$, D.O 方程式であらわせる。

定理 1. $\mathcal{U}^+; \overline{G}_+ \setminus S_Y^* X = S_N^* X \cap S_{M+}^* X - S_Y^* X \longrightarrow S_N^* Y = \lambda S^* N$ (proj.) とした時、 $\forall (x_0, \lambda y_0) \in \lambda S^* N$ に対して、 $\mathcal{U}^{+T}(x_0, \lambda y_0) \cap G_+ \cap \{\sigma_m(p)=0\}$ が重複度も込めてちょうど m' 個の点からなっているとすると、 $(0 \leq m' \leq m)$ 、 $P\tilde{u}(x) = F(x)$ が $\{\sigma_m(p)=0\} \cap G_+ \cap \mathcal{U}^{+T}(x_0, \lambda y_0)$ で可解である為の必要十分条件は ($\tilde{u}$ は存在すれば命題 3 より一意) P に対して定まるある $\pm$, D.O からなる Matrix による $f_{m'}, \dots, f_m$ の $(C_N|_{(x_0, \lambda y_0)})^{m-m'}$ の germ として) 像で $f_0, \dots, f_{m-1}$ がかけることである。
($C_N|_{(x_0, \lambda y_0)}^{m'}$ の germ として)

実際この $\pm$, D.O を具体的な留数計算で上の symbol から順に求める事ができるが省略する。

次に問題なのは、 $\partial G_+ \cap \{\sigma_m(p)=0\}$ 上での可解性であるが、 $(S_Y^* X \cap \{\sigma_m(p)=0\} = \emptyset)$, micro local に片側双曲型に当る場合は Cauchy 問題が解けるので $f_0, \dots, f_{m-1}$ に対して無条件に $P\tilde{u} = F$ は解ける。(もちろん $\tilde{u} \in C_{M+1}X$ として)

即ち次が成立する。

定理2 (金子).

$\{\sigma_m(p)=0\} \cap \partial G_+ \ni (0, x_0; i\eta_0)$ の S^*X における近傍 U が存在して、
 $\{(z, \zeta) \in U \mid z \in M_+, \operatorname{Im} \zeta' = 0, \operatorname{Re} \zeta_1 > 0\} \cap \{\sigma_m(p)=0\} = \emptyset$

ならば $P\tilde{u} = F$ は $(0, x_0; i\eta_0)$ で無条件に解ける。 ($\tilde{u} \in C_{M+1}X$)

(このような $\tilde{u}$ は ∂G_+ 上では $C_{M+1}X$ の germ としてはわからないが、
 いかくとも命題3より C_M の元としては一意。)

従って問題なのは、Th 1, 2 とも成立しないような境い目の所であるが、そのような所は回折現象などの起こる所で、境界値の間の関係は一般には micro-local operator をもってしてもかけない事が予想されている。

(注) 楕円型の場合は、 $\partial G_+ \cap \{\sigma_m(p)=0\} = \emptyset$ であるので定理1だけで完全にわかる。定理2の例は $P = D_{x_1}^2 - x_1 D_{x_2}^2$ など。

§3. 非特性境界値問題の超局所的な一般化

一般に同次境界値問題とは、境界値の間にいくつかの微分方程式を課して、境界値がそれらの方程式を満たす様な P の $\alpha > 0$ での解をすべて求める事である。そこで境界値 $(f_0, \dots, f_{m-1}) \leftrightarrow F = f_0(\alpha)\delta(\alpha) + \dots + f_{m-1}(\alpha)\delta^{(m-1)}(\alpha)$ というように $C_{N+1}X$ の section としてとらえ、解 $u(\alpha) \leftrightarrow \tilde{u}(\alpha) \in \pi_{M+1}X * C_{M+1}X$ としてとらえる事によって問題を $S_N^*Y = \lambda S_N^*N$ 上に超局所化できる。

(S_Y^*X は非特性としているので無視できる。)

$$\text{つまり } \mathcal{L}^+; \overline{G}_+ \setminus S_Y^* X = S_M^* X \cap S_N^* X - S_Y^* X \longrightarrow S_N^* Y = i S^* N$$

$$\mathcal{L}; S_N^* X - S_Y^* X \longrightarrow S_N^* Y = i S^* N$$

として, $\mathcal{L}^* P_X$, $\mathcal{L}^* C_N X$, $\mathcal{L}^+ C_{M+1} X$ という $i S^* N$ 上の sheaf を考える。

Def $\mathcal{L}^* P_X^+ \ni P(X, D)$ が non-char. とは $P \neq 0$ であって,

$$\{ \sigma(P) = 0 \} \cap (S_N^* X - S_Y^* X) \xrightarrow{2} i S^* N \text{ が proper map のこと。}$$

特に fiber は有限個で重複度も込めて一定 $= m$ なので, それを P の本質的階数という事にする。non char. のものは明らかに $\mathcal{L}^* P_X^+$ の積について閉じている。

Lemma (小松-河合の境界値の一般化)

$\mathcal{L}^* P_X^+ \ni P(X, D_X)$: non char. に対して, 本質的階数を m とする

$$\text{と, } \mathcal{L}^* C_N X = P(\mathcal{L}^* C_N X) \oplus \sum_{j=0}^{m-1} C_N \cdot \delta(\mathcal{L}_j)$$

$$\text{又は } \mathcal{L}^* C_N X / P(\mathcal{L}^* C_N X) \cong C_N^m$$

Def $P \in \mathcal{L}^* P_X^+$; non char. この時 $P(\mathcal{L}^* C_N X) \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L}^* C_N X$ なる subsheaf $\mathcal{F}$ が B 型とは,

(B) ... $\mathcal{F} / P(\mathcal{L}^* C_N X) \hookrightarrow \mathcal{L}^* C_N X / P(\mathcal{L}^* C_N X) \cong C_N^m$ として C_N^m の部分層と考えた時, $\exists Q(X, D_X); C_N^m \longrightarrow \exists C_N^f$ (Q は有限階 $\pm D$, 0. の Matrix) s.t. $\mathcal{F} / P(\mathcal{L}^* C_N X) \cong \text{Ker } Q$ とかけること。

Def $(\varphi_M, \varphi_N); (T^* X, T^* Y) \longrightarrow (T^* X, T^* Y)$ はそれぞれ複素接触変換で

$$\textcircled{1} \varphi_N; S_N^* Y \hookrightarrow S^* Y, \quad \varphi_M; S_M^* X \hookrightarrow S^* X$$

$$\textcircled{2} \varphi_M; S_N^* X - S_Y^* X \hookrightarrow S_N^* X - S_Y^* X$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi_M|_{S_M^*X - S_Y^*X} = \varphi_N \circ \iota$$

を満たすとし、 φ_N が $S_N^*Y \cup U$ の近傍で定義されている時、 φ_M は $\iota(U)$ の近傍で定義されているとする。

以上のような条件を満たす (φ_M, φ_N) をB型の変換と呼ぶ。

(注) T^*X の複素接触変換 φ_M で S_M^*X , $\pi^{-1}(N)$ を不変にするものを与える事とB型の変換を与える事は同値である。

命題 B型の変換 (φ_M, φ_N) に対して、量子化された接触変換 $(\mathfrak{U}_M, \mathfrak{U}_N)$ が存在して、 $\mathfrak{U}_M^* C_{M+1|X} \xrightarrow{\mathfrak{U}_M} \mathfrak{U}_M^* C_{M+1|X}$, $\mathfrak{U}_M^* C_{N|X} \xrightarrow{\mathfrak{U}_M} \mathfrak{U}_M^* C_{N|X}$, $C_N \xrightarrow{\mathfrak{U}_N} C_N$ という $\mathfrak{U}_X$ -module としての層同型が成立し、 $\mathfrak{U}_M$ と $\mathfrak{U}_N$ は $\mathfrak{U}_M^* C_{N|X}$ の境界値をとる操作(P も1つ決めた時)と両立し、 $\mathfrak{U}$ がB型ならば $\mathfrak{U}^* \mathfrak{U}$ もB型になる。

(これは $C_{M+1|X}$ の所でまだ厳密には証明できていないが正しい根拠は十分ある。)

以上の準備の下で境界値問題を一般化すると、

“ $P \in \mathfrak{U}_X^f$; non. char. $\mathfrak{U}$; B型の $\mathfrak{U}_M^* C_{N|X}$ の部分層を与えて、 $\{u \in \mathfrak{U}_M^* C_{M+1|X} \mid Pu \in \mathfrak{U}\}$ を求める事。”となる。

実例として回折現象に当る境界値問題は、B型の変換により、genericには、

$P = D_1^2 - (\alpha_1 - \alpha_2) A(\alpha, D)$; A は2階のE.D.Oで D_1 を含まず、 $\sigma_2(A) = \{\lambda(\alpha, \zeta')\}^2$, $\frac{1}{\lambda} \lambda(\alpha, i\eta') > 0$ となる。

参考文献

- [1] 相原-河合. 楕円型境界値問題について. 数理研 (1973)
- [2] 金子. On Continuation of Regular Solutions of P.D.E.
with Real Analytic Coefficients. 数理研講究録
(1975. 7)
- [3] 小松-河合. Boundary values of hyperfunction solutions
of L.P.D.E. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 7 (1971)
- [4] 森本. 超函数の台と特異台 (佐藤予想と層 CN_X)
数理研講究録, 168 (1972), 28-59.
- [5] 佐藤-相原-河合. Microfunctions and Pseudo Differential
equations, Lecture Notes in Math. No. 287,
Springer, 1973.