

時間依存的非線形発展方程式
の解法についての一注意

電気通信大 渡辺 二郎

§1 序

前にヒルベルト空間 H において次のような非線形の微分方程式に対するコーシー問題を考えた ([2]):

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + \partial \varphi^t(u(t)) \ni g(t, u(t)) & (0 \leq t \leq T) \\ u(0) = a. \end{cases}$$

ここで " φ^t ($0 \leq t \leq T$) は H から $(-\infty, +\infty]$ の中への下半連続凸関数で", " $\varphi^t \neq +\infty$ とする. $\partial \varphi^t$ は φ^t の sub-differential であり, 各 $u \in H$ に対して

$$\partial \varphi^t(u) = \{w \in H \mid \varphi(v) \geq \varphi(u) + (w, v-u), \forall v \in H\}$$

を対応させる多価写像である. g は $[0, T] \times H$ から H への写像である.

次の結果を得た ([2]).

定理 1. 次の 4 条件を仮定する.

(I) $\{u \in H \mid \varphi^t(u) < \infty\} \equiv D$ は t によらない.

(II) 任意の $r > 0$ に対して $c_r, c'_r > 0$ が存在して

$$|\varphi^s(u) - \varphi^t(u)| \leq |s - t| \cdot [c_r \cdot \varphi^t(u) + c'_r] \\ (0 \leq s, t \leq T, u \in D : \|u\| \leq r).$$

(III) ある $b \in D$ が存在して

$$\int_0^T |\partial \varphi^t(b)| dt < \infty.$$

ここで

$$|\partial \varphi^t(b)| = \min \{ \|w\| \mid w \in \partial \varphi^t(b) \}.$$

(IV) g は $[0, T] \times H$ から H への連続写像であり, B が H の有界部分集合のとき $g([0, T], B)$ は有界である. また, ある $c_0 > 0$ が存在して, すべての t と $u, v \in H$ に対して $(g(t, u) - g(t, v), u - v) \leq c_0 \cdot \|u - v\|^2$ が成り立つ.

条件(I) - (IV) がみたされるならば, 任意の $a \in D$ に対して $u \in C([0, T]; H)$ と $y \in L^2(0, T; H)$ が一意的に存在して

i) $u(t) \in D$ ($0 \leq t \leq T$) か $y(t) \in \partial \varphi^t(u(t))$ (a. e. $0 \leq t \leq T$).

ii) $u(t) + \int_0^t y(\sigma) d\sigma = a + \int_0^t g(\sigma, u(\sigma)) d\sigma$ ($\forall t$) が成り立つ.

条件(IV) が窮屈であるために, 上の定理をそのままの形で

たとえば次のような問題に対して適用することはできない。

条件(IV)をゆるめたい。

例. Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域で, その境界 Γ はなめらかとする。
 $a_{ij}(x, t)$, $b_j(x, t)$, $c(x, t)$ は $\bar{\Omega} \times [0, T]$ 上のなめらかな実数値関数とする. ($i, j = 1, 2, \dots, N$).
 $g(x, t, u)$ は $\Omega \times [0, T] \times (-\infty, \infty)$ 上の実数値関数で,
 各 $u \in L^2(\Omega)$ と各 t に対して $x \rightarrow g(x, t, u(x))$ は
 $L^2(\Omega) (= H)$ に属し, $g: [0, T] \times L^2(\Omega) \ni (t, u) \rightarrow g(x, t, u) \in L^2(\Omega)$ は条件(IV)をみたすとする。

$$(P.1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - c \cdot u^{2p-1} + g(x, t, u) \\ (x \in \Omega, 0 \leq t \leq T) \\ u(x, t) = 0 \quad (x \in \Gamma, 0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) = a(x) \quad (x \in \Omega). \end{cases}$$

$$(P.2) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + g(x, t, u) \\ (x \in \Omega, 0 \leq t \leq T) \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} = c \cdot u^{2p-1} \quad (x \in \Gamma, 0 \leq t \leq T) \\ u(x, 0) = a(x) \quad (x \in \Omega). \end{cases}$$

ここで $a_{ij}(x, t)$ は一様に放物的であり, $c(x, t) \geq 0$

かつある $\delta \in (0, 1)$ が存在して

$$(1) \quad \delta \leq \frac{c(x, t)}{c(x, s)} \leq \frac{1}{\delta} \quad (x \in \bar{\Omega}, 0 \leq t, s \leq T)$$

がなりたつとする。ただし (1) において $0/0=1$, $c > 0$ のとき $c/0=\infty$ とする。また p は正整数である。 ν は a_{ij} に対する外向き余法線である。(P.2) において初期値 a は

$$-\partial a / \partial \nu = c(x, 0) a^{2p-1} \quad (x \in \Gamma)$$

をみたすものとする。

(P.2) は、たとえ $g \equiv 0$ であっても、 $p \geq 2$ の場合には非線形であることに注意する。

われわれの方法では (P.1) も (P.2) も同様に扱うことができるから、(P.2) についてだけ考えることにする。

(P.2) の場合、 φ^t として

$$\varphi^t(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \frac{1}{2p} \int_{\Gamma} c \cdot u^{2p} d\Gamma \\ \quad (u \in H^1(\Omega) \text{ かつ } c \cdot u^{2p} \in L^1(\Gamma) \text{ のとき}) \\ \infty \quad (\text{その他の } u \in L^2(\Omega) \text{ に対して}) \end{cases}$$

とおく ([1] 参照)。このとき $\{u | \varphi^t(u) < \infty\} \equiv D$ は t に無関係であり、 $\partial \varphi^t$ の定義域 $D(\partial \varphi^t)$ は

$$D(\partial \varphi^t) = \{u \in H^2(\Omega) | -\frac{\partial u}{\partial \nu} = c(x, t) u^{2p-1} \text{ (a.e. } x \in \Gamma) \}$$

であり, 各 $u \in D(\partial\varphi^t)$ に対して

$$\partial\varphi^t(u) = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j})$$

である. したがって (P.2) を

$$(P.2)' \begin{cases} \frac{du}{dt} + \partial\varphi^t(u) = f(t, u) & (0 \leq t \leq T) \\ u(0) = a \end{cases}$$

とかくことができる. ただし

$$(2) f(t, u) = \sum_j b_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + g(x, t, u).$$

$H = L^2(\Omega)$ とすれば, (P.2)' に対して条件 (I) - (III) はなりたつが, 条件 (IV) はなりたたない.

§2. 結果と応用例

一般の実ヒルベルト空間 H において定理 1 の条件 (I) - (IV) をみたす φ^t が与えられているとする. コーシー問題

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + \partial\varphi^t(u(t)) \ni f(t, u(t)) & (0 \leq t \leq T) \\ u(0) = a \end{cases}$$

を考える. ここで, f は各 $t \in [0, T]$ と各 $u \in D(\partial\varphi^t)$ に対して $f(t, u) \in H$ を対応させる写像とする. f に対して次の諸条件をみたす列 $\{f_n\}$ をとることができる仮定する.

(V) f_n ($n=1, 2, \dots$) は $[0, T] \times H$ から H への連続写

像であり, 各 n と各有界集合 $B \subset H$ に対して $f_n([0, T], B)$ は有界である. 各 n に対して実数 γ_n が存在して

$$(f_n(t, u) - f_n(t, v), u - v) \leq \gamma_n \|u - v\|^2 \quad (\forall t, \forall u, v).$$

(VI) $C([0, T]; H)$ において列 $\{u_n\}$ が u_0 に強収束するとする. もし $f_n(t, u_n)$ が $L^2(0, T; H)$ においてある v に弱収束し, $\sup \{\varphi^t(u_n(t)) \mid 0 \leq t \leq T, n=1, 2, \dots\} < \infty$, かつ $u_0(t) \in D(\partial\varphi^t)$ a.e. ならば

$$f(t, u_0(t)) = v(t) \quad \text{a.e. } 0 \leq t \leq T.$$

(VII) 任意の $r > 0$ に対して $c_r, c'_r > 0$ が存在して $\|f_n(t, u)\|^2 \leq c_r \varphi^t(u) + c'_r \quad (\forall n, \forall t, \forall u \in D: \|u\| \leq r).$

(VIII) ある実数 γ が存在して

i) 任意の $n, t, u \in D(\partial\varphi^t), u_1 \in \partial\varphi^t(u), v \in D(\partial\varphi^t), v_1 \in \partial\varphi^t(v)$ に対して

$$([f_n(t, u) - f_n(t, v)] - [u_1 - v_1], u - v) \leq \gamma \|u - v\|^2.$$

ii) 任意の $\varepsilon > 0$ と $r > 0$ に対してある正整数 $n_{\varepsilon r}$ が存在して, 各 $n, m \geq n_{\varepsilon r}$, 各 t , 各 $u, v \in D(\partial\varphi^t): \|u\| \leq r, \|v\| \leq r,$

$$\varphi^t(u) \leq r, \varphi^t(v) \leq r,$$

各 $u_1 \in \partial\varphi^t(u)$ および各 $v_1 \in \partial\varphi^t(v)$ に対して

$$([f_n(t, u) - f_m(t, v)] - [u_1 - v_1], u - v) \leq \gamma \|u - v\|^2 + \varepsilon.$$

定理 2. 以上の仮定のもとで, 任意の $a \in D$ に対して—

意的に $u \in C([0, T]; H)$ と $y \in L^2(0, T; H)$ が存在して

i) $u(t) \in D(0 \leq t \leq T)$ か $y(t) \in \partial \varphi^t(u(t))$ (a. e. $0 \leq t \leq T$).

ii) $f(t, u(t)) \in L^2(0, T; H)$.

iii) $u(t) + \int_0^t y(\sigma) d\sigma = a + \int_0^t f(\sigma, u(\sigma)) d\sigma$ ($0 \leq t \leq T$).

定理1の証明に類似の方法により, 定理2を証明することができ, ここでは証明しない.

(P. 2)′ に対して定理2が適用できることを示そう. この場合の f に対して $\{f_n\}$ をどのようにとればよいか, (2)で与えられる f のかわりに, 簡単のために

$$f(t, u) = \psi(\alpha, t) \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

とする. ここで ψ は $\bar{\Omega} \times [0, T]$ 上のなめらかな関数である.

$\tilde{\Omega}$ は R^N の開集合で, Ω の閉包を含むものとする. Ω の境界 Γ がなめらかであるから, 連続線形作用素 $E: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\tilde{\Omega})$ で次の諸条件をみたすものが存在する:

$$\begin{cases} \text{各 } u \in L^2(\Omega) \text{ に対して } Eu \text{ の } \Omega \text{ への制限は } u \text{ に等しい.} \\ \text{各 } u \in H^1(\Omega) \text{ に対して } Eu \in H^1(\tilde{\Omega}). \\ E \text{ の } H^1(\Omega) \text{ への制限は } H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\tilde{\Omega}) \text{ として連続である.} \end{cases}$$

$$f_n(t, u) = \varphi(x, t) \frac{\partial}{\partial x_1} (p_n * Eu) \quad (0 \leq t \leq T, u \in L^2(\Omega))$$

とおく. ここで $p_n *$ は軟化子を表わすものとする.

f_n が条件 (V) - (VIII) をみたすことを証明する.

(V) 各 n に対して実数 γ_n が存在して

$$\begin{aligned} (f_n(t, u) - f_n(t, v), u - v)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \varphi(x, t) \frac{\partial p_n * E(u - v)}{\partial x_1} \cdot (u - v) dx \\ &\leq \gamma_n \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

(VI) $Q = [0, T] \times \Omega$ とおく. $L^2(Q)$ で $u_n \rightarrow u_0$ (強) かつ $L^2(Q)$ で $f_n(t, u_n) \rightarrow v$ (弱) ならば $f(t, u_0) = v$ になりたつことを証明することは容易である.

(VII) 2 正数 C, C' が存在して

$$\|f_n(t, u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \varphi^t(u) + C' \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\forall n, \forall t, \forall u \in L^2(\Omega)).$$

なぜならば, $C, C', C'' > 0$ が存在して

$$\|f_n(t, u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C'' \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \varphi^t(u) + C' \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

(VIII) $u, v \in D(\partial \varphi^t)$, $u_1 = \partial \varphi^t(u)$, $v_1 = \partial \varphi^t(v)$

とする. したがって $u \in H^2(\Omega)$ であって

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial \nu} = C(x, t) \cdot u^{2p-1} \quad \text{a.a. } x \in \Gamma \\ u_1 = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) \end{cases}$$

をみたす. v, v_1 に対しても同様である. したがって

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial(u-v)}{\partial \nu} \cdot (u-v) d\Gamma \leq 0.$$

したがって一様放物性により $\mu > 0$ が存在して

$$(3) \quad \begin{aligned} (u_1 - v_1, u - v)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial(u-v)}{\partial x_j} dx - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial(u-v)}{\partial \nu} (u-v) d\Gamma \geq \mu \cdot \sum_i \left\| \frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

次に

$$\begin{cases} I = (f_n(t, u) - f_n(t, v), u - v)_{L^2(\Omega)} \\ II = (f_n(t, v) - f_m(t, v), u - v)_{L^2(\Omega)} \end{cases}$$

とおく. $(f_n(t, u) - f_m(t, v), u - v)_{L^2(\Omega)} = I + II$ である.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $C_\varepsilon > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (p_n * E(u-v)) \cdot (u-v) dx \\ &\leq \varepsilon \cdot \left\| p_n * \frac{\partial E(u-v)}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\varepsilon \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

がなりたつことと u, v と n に無関係な $C > 0$ が存在して

$$\left\| p_n * \frac{\partial E(u-v)}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$$

がなりたつことから, (3) により u, v, n に無関係な γ が存在して

$$I \leq (u_1 - v_1, u - v)_{L^2(\Omega)} + \gamma \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

がなつた。したがつて (VIII) i) をみたすことがわかつた。

(VIII) ii) をみたすことを示すために次のことに注意する。

任意の $\varepsilon > 0$ と $r > 0$ に対して正整数 $n_{\varepsilon r}$ が存在して, $u \in H^1(\Omega)$, $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq r$, $n \geq n_{\varepsilon r}$ ならば

$$(4) \quad \int_{\Gamma} |(p_n * Eu)(x) - u(x)|^2 d\Gamma \leq \varepsilon$$

かつ

$$(5) \quad \int_{\Omega} |(p_n * Eu)(x) - u(x)|^2 dx \leq \varepsilon.$$

なぜならば, まず任意の $\beta > 0$ に対して

$$(6) \quad \lim_{|y| \rightarrow 0} \sup_{\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \beta} \int_{\Gamma} |w(x-y) - w(x)|^2 d\Gamma = 0.$$

また, ほとんどすべての $x \in \Gamma$ に対して

$$(p_n * Eu)(x) - u(x) = \int_{|y| \leq \frac{1}{n}} p_n(y) [Eu(x-y) - Eu(x)] dy$$

であるから, シュワルツの不等式を用いて

$$\|p_n * Eu - u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \sup_{|y| \leq \frac{1}{n}} \int_{\Gamma} |Eu(x-y) - Eu(x)|^2 d\Gamma.$$

よつて (6) により (4) を得る. (5) についても同様である。

$$II = \int_{\Omega} \theta \frac{\partial}{\partial x_1} [(p_n - p_m) * Eu] (u - v) dx$$

$$= - \int_{\Omega} [(p_n - p_m) * E v] \frac{\partial [\phi(u-v)]}{\partial x_1} dx + \\ + \int_{\Gamma} \phi [(p_n - p_m) * E v] \cdot (u-v) \cos(x_1, n) d\Gamma$$

であるから, 上の注意により, 任意の $\varepsilon > 0$ と $r > 0$ に対し
て正整数 $n_{\varepsilon r}$ が存在して, $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq r$, $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq r$
かつ $n, m \geq n_{\varepsilon r}$ ならば $|II| \leq \varepsilon$. したがって (VIII)
ii) をみたすことがわかった.

文 献

- [1] H. Brezis, Propriétés régularisantes de
certains semi-groupes non linéaires, Israel
J. Math. 9, 513 - 534 (1971).
- [2] 渡辺=郎, ある種の時間依存的な非線形発展方程式
について, 京都大学数理解研講究録 134 (1972年1月).