

ϑ -Weyl 和

名大 中井 喜信

Weyl 和と解析数論の方面で呼ばれているものは、

$f(x)$ を実係数の多項式, $e(x) = e^{2\pi i x}$ とおくと, $\sum_{x < m \leq x+N} e(f(m))$
 の形の有限和の事で、 f の係数と次数に適當な条件を課して
 $N \rightarrow \infty$ とする時のこの和の挙動が主な関心の的となり、てい
 る。今 $f(x)$ が 1 次式なら之は中級数であるから、もう十分にわ
 かる。次に $f(x)$ が 2 次式なら、古くは Hardy と Littlewood に
 より調べられ、[1] にも誤差 $O(N^{\frac{1}{2}})$ を許す事により、 $f(x)$ の
 係数より生じる連分數展開を使うとますますの形に書ける事
 が示されている。いわゆる ϑ -級數 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \tau n^2}$ ($\text{Im} \tau > 0$)
 とある意味で似たふるまいをするため、今 $Q(x)$ を実二次形
 式(今後に変數の个数を " l " とおこう), σ を $\mathbb{R}^l$ 内の閉凸多
 辺形で大きさ有限、辺の个数は $O(1)$ だけのものとして、 γ は $\mathbb{R}^l$ 内
 のベクトルとし、 $\sum_{m \in \sigma \cap \mathbb{Z}^l} e(\frac{1}{2} Q(m + \gamma))$ の形の "有限和" を
 標題に言う(l 次元の) ϑ -Weyl 和と呼ぶ事にして、上の $l=1$

の場合に [1] で述べられているような形で、一般の k の場合も扱いたい。ここでは、2変数でしか [1] の Lemma 3 に相当する部分のみ述べる。証明は、初等的で退屈な計算にたよるため、大部分は述べてない。誤差項は、log-factor 分だけ期待される形より悪い評価である。

§ 1. Poisson の和公式

今 $\phi(x)$ を連続でかつ $\phi'(x)$ も連続な $\mathbb{R}$ 上の函数として、 $\langle x \rangle = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \dots x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \dots x \in \mathbb{Z} \end{cases}$, 及び $\langle x \rangle_0 = x - [x] - \frac{1}{2}$, ($[x]$ は Gauss の記号) とおく時、Euler-MacLaurin に依り

$$\sum_{a < n \leq b} \phi(n) = \int_a^b \left\{ \phi(x) + \langle x \rangle \cdot \phi'(x) \right\} dx + \left[-\langle x \rangle \phi(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

となる。今 $\langle x \rangle = \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{-1}{2\pi i} \right) \frac{1}{n} \cdot e(n x)$ と展開されているので、之に Euler-MacLaurin を使えば

$$\begin{aligned} \tilde{T}_N(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{n} \cdot e(n x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i x y}}{1 + (N+1) |y|} dy \quad \left(\begin{array}{l} \tilde{x} \equiv x \pmod{1}, |\tilde{x}| \leq \frac{1}{2} \\ \text{or } 0 \end{array} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{1 + (N+1) |x|} \right) \end{aligned}$$

とある時

$$\langle x \rangle = \sum'_{-N \leq n \leq N, n \neq 0} \left(\frac{-1}{2\pi i} \right) \frac{1}{n} e(n x) - \tilde{T}_N(x) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

となる。之に依り、

(Lemma 1) $f(x)$ は連続で $f'(x)$ も連続な $\mathbb{R}$ 上の函数とする時、 $\sum_{a \leq n \leq b} f(n)$ で $a \in \mathbb{Z}$ 及び $b \in \mathbb{Z}$ である両端項は $\frac{1}{2}$ 倍する事とし

$$\begin{aligned}
\sum_{a \leq m \leq b} \tilde{f}(m) &= \sum_{|n| \leq N} \int_a^b f(x) \cdot e(nx) \cdot dx + \left[\tilde{T}_N(x) \cdot f(x) \right]_{x=a}^{x=b} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{N} \cdot \int_a^b |f(x)| \cdot dx\right) + \left[O\left(\frac{1}{N} |f(x)|\right) \right]_{x=a}^{x=b} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sup_x \sum_k |f(x+ke)|\right) \\
&\quad \quad \quad 0 \leq x \leq 1, k \in \mathbb{Z}, a \leq x+ke \leq b
\end{aligned}$$

となる。 $N \rightarrow \infty$ とすれば通常の Poisson 和公式となる。

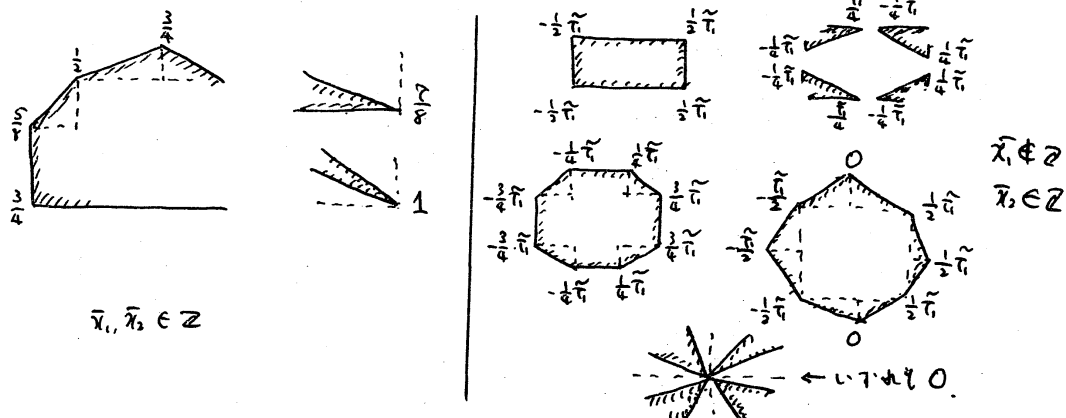
(Lemma 2) $F(x)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の函数で F, F_1, F_2, F_{12} はそれぞれ連続とし、 $\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}^2$ 内の閉凸多边形で $\left(\sum_{m \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2} F(m) \right)^{\frac{1}{2}}$ 収束するならば有界でなくては可) あれば $\langle \binom{m_1}{m_2}, \binom{n_1}{n_2} \rangle_{\mathbb{Q}_f} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ として

$$\sum_{m \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2} F(m) = \sum_{\substack{m = \binom{m_1}{m_2} \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{s.t. } |m_1| \leq N_1, |m_2| \leq N_2}} \iint e(\langle m, x \rangle) \cdot F(x) \cdot dx + o(1)$$

$$+ \sum_{\substack{m \in \partial \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \\ \text{頂点ではない}}} \frac{1}{2} F(m) + \sum_{P: \mathcal{C} \text{ の頂点}} (\text{下には述べる weight を } \gamma_P) \cdot F(P)$$

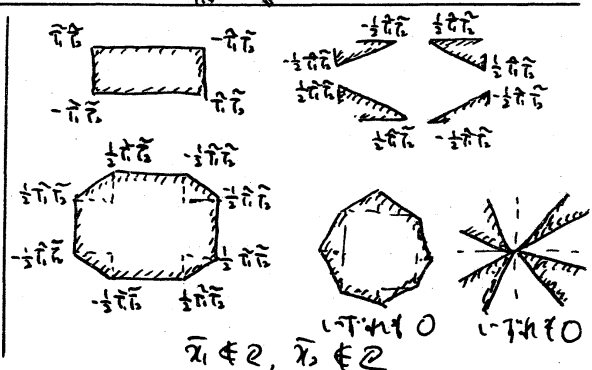
$$+ \left[\hat{T}_2(\bar{x}_2) \cdot \sum_{\substack{\hat{q}_1 < m_1 < \hat{q}_1' \\ \text{F の辺}}} F(m_1) \right]_{\substack{\bar{x}_2 = \frac{q_2}{F \text{ の辺}}}^{\bar{x}_2 = \frac{q_2'}{F \text{ の辺}}} + \left[\hat{T}_1(\bar{x}_1) \cdot \sum_{\substack{\hat{q}_2 < m_2 < \hat{q}_2' \\ \text{F の辺}}} F(m_2) \right]_{\substack{\bar{x}_1 = \frac{q_1}{F \text{ の辺}}}^{\bar{x}_1 = \frac{q_1'}{F \text{ の辺}}}$$

となる。ただし $\hat{T}_i(x_i) = \tilde{T}_{N_i}(x_i)$ ($i=1,2$) であり $\bar{x}_i = \frac{q_i}{\text{F の辺}}$ 等の記号は $\mathcal{C}$ の水平な辺上でのみ $\sum$ とする事を示す ($\bar{x}_i = \frac{q_i}{\text{F の辺}}$ は垂直な辺上でのみ)。又 $o(1)$ は (Lemma 1) にある O -terms と同じように "explicit" な評価が出来るが、複雑なのでここには書かない。 $\mathcal{C}$ の頂点 $P = \binom{x_1}{x_2}$ について、つけるべき weight は P に接する辺の角により、場合分けをして。



右上の図で π と $\bar{\pi}$ にとりかえて、直線 $x = x_2$ について位置を対称に入れかえた重み。

$$\begin{aligned} x_1 &\in \mathbb{Z} \\ x_2 &\notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$$\text{例 } \pi = \bar{\pi}_{m_2}(x_2) \quad i=1, 2$$

である。

§ 2. $\Psi_2(y)$

今、 $\varepsilon = \pm 1$, $y \geq 0$ とし、 $\Psi_2(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{\varepsilon}{2}y^2)} \int_0^\infty e^{(\frac{\varepsilon}{2}t^2)} dt$ とおく。之は parabolic cylinder 函数の一部と見做すことができる。特に $\Psi_2(|y|) \cdot |y| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{\varepsilon}{2}y^2)} \int_0^\infty e^{-\pi t^2} \{t - e^{(\frac{\varepsilon}{2}y^2)} y\}^{-1} dt$ ($y \in \mathbb{R}, y \neq 0$) の積分表示は便利である。又 $\operatorname{Re} \Psi_2(y) = C(y)$, $\operatorname{Im} \Psi_2(y) = \varepsilon \cdot S(y)$ とおけば $C(0) = S(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $C(y)$ と $S(y)$ は各々 $y > 0$ で正値で $y \rightarrow \infty$ の時単調減少する。
 $C(y) \approx (4\pi^2 y^3)^{-1}$, $S(y) \approx (20 y)^{-1}$ である。 $C'(y)$ は負値で $y \rightarrow \infty$

$\rightarrow \infty$ の時 単調増大で $C'(y) \approx -\frac{3}{4\pi^2 y^4}$, $S'(y)$ は 連続である。
 $0 < y < \rho_2$ の時 単調減少, $\rho_2 < y < \infty$ の時 単調増大
 で $S'(y) \approx -(2\pi y^2)^{-1}$ となる。(ここに $\rho_2 \doteq 1$ となる)。)

(Lemma 3) $X_2 > X_1$, $\alpha \neq 0$ (実数), D_0 実数として

$$\begin{aligned} \int_{X_1}^{X_2} C\left(\frac{1}{2\alpha}(x-D_0)^2\right) dx &= X \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot C\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\delta}\right) \\ &\quad - \rho_\alpha^*(X_2-D_0) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot C\left(\frac{1}{2\alpha}(X_2-D_0)^2\right) \cdot \mathcal{E}_\Sigma\left(\frac{|X_2-D_0|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &\quad + \rho_\alpha^*(X_1-D_0) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot C\left(\frac{1}{2\alpha}(X_1-D_0)^2\right) \cdot \mathcal{E}_\Sigma\left(\frac{|X_1-D_0|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで $\Sigma_\alpha = \rho_\alpha \alpha$, $\rho_\alpha^* x = \begin{cases} \rho_\alpha x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$,
 $\rho_\alpha^* x = \begin{cases} \rho_\alpha x & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$, $X = \begin{cases} 1 & \dots X_1 \leq D_0 \leq X_2 \\ 0 & \dots D_0 < X_1 \text{ 又は } X_2 < D_0 \end{cases}$ となる。

(Lemma 4) $K > 0$, B : 実数, $\varepsilon = \pm 1$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\alpha(y) \cdot \mathcal{E}_\Sigma(K|y|) \cdot C(By) dy = (-i) \rho_\alpha B \cdot K^{-1} e(-\frac{\varepsilon}{\delta}) \cdot \mathcal{E}_{-\Sigma}(K^{-1}|B|)$$

となる。但し $\rho_\alpha 0 \neq 0$ 。

(Lemma 5) $\alpha \neq 0$ (実数), u : 実数, $\varepsilon = \pm 1$ として

$$J_\varepsilon(u; \frac{1}{\alpha}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\alpha y \cdot \mathcal{E}_\Sigma(|y|) \cdot C\left(\frac{(y-u)^2}{2\alpha}\right) dy$$

は、 $\alpha \neq \varepsilon$ の時

$$\begin{aligned} &= \rho_\alpha(\varepsilon \Sigma_\alpha \Sigma'_\alpha u) \cdot \left| \varepsilon - \frac{1}{\alpha} \right|^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(e\left(\frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{u^2}{2\alpha}\right) \cdot \mathcal{E}_{-\varepsilon \Sigma'_\alpha}\left(\frac{|u|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}} |\alpha - \varepsilon|^{\frac{1}{2}}}\right) \right. \\ &\quad \left. - e\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) \cdot \mathcal{E}_{-\varepsilon \Sigma'_\alpha}\left(\frac{|u|}{|\alpha - \varepsilon|^{\frac{1}{2}}}\right) \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $\Sigma_\alpha = \rho_\alpha \alpha$, $\Sigma'_\alpha = \rho_\alpha(|\alpha| - \varepsilon \Sigma_\alpha)$, $\rho_\alpha 0 \neq 0$ 。

また $\alpha = \varepsilon$ について $J_\varepsilon(u; \varepsilon) = e(-\frac{\varepsilon}{\delta}) \cdot \left\{ e\left(\frac{\varepsilon}{2} u^2\right) - 1 \right\} \cdot (2\pi u)^{-1}$ 。

(Lemma 6) $\alpha \neq 0$ (実数), u : 実数 γ 17

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(y) \cdot \Psi_2(|y|) \cdot e\left(\frac{(y-u)^2}{2\alpha}\right) dy = O\left(\min\left\{|\alpha|^{\frac{1}{2}}, |x_2-x_1|, \log(2+|\alpha|)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$$

となる。

(Lemma 7) Lemma 5 の記号を用い. x_1, x_2, v_0 が互いに異なり又 $0 \neq v_0$ の時. $|v_0| \asymp |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ かつ $|x_j - v_0| \asymp |\alpha|^{\frac{1}{2}} (j=1, 2)$ のとき (この場合以外). $x_2 > x_1$ の時

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(y) \cdot \Psi_2(|y|) \cdot e\left(\frac{(y-v_0)^2}{2\alpha}\right) dy$$

$$= \begin{cases} (a) & x_1, x_2 \text{ 同符号 かつ } x_1 - v_0, x_2 - v_0 \text{ 同符号の時} \\ & : \sum_{j=1,2} O\left(|\alpha|^{\frac{1}{2}} \left| \Psi_2(|x_j|) \cdot \Psi_2\left(\frac{|x_j - v_0|}{|\alpha|^{\frac{1}{2}}}\right) \right| \right) \\ (b) & x_1, x_2 \text{ 同符号 かつ } x_1 - v_0, x_2 - v_0 \text{ 異符号の時} \\ & : \eta(v_0) \cdot e\left(\frac{v_0^2}{2\alpha}\right) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot \Psi_2(|v_0|) + \sum_{j=1,2} O\left(\eta(v_0) \cdot \Psi_2(|v_0|) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}}\right) \\ (c) & x_1, x_2 \text{ 異符号 かつ } x_1 - v_0, x_2 - v_0 \text{ 同符号の時} \\ & : J_2(v_0; \frac{1}{2}) - \eta(v_0) \cdot e\left(\frac{v_0^2}{2\alpha}\right) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot \Psi_2(|v_0|) + \sum_{j=1,2} O\left(\eta(v_0) \cdot \Psi_2(|v_0|) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}}\right) \\ (d) & x_1, x_2 \text{ 異符号 かつ } x_1 - v_0, x_2 - v_0 \text{ 異符号の時} \\ & : J_2(v_0; \frac{1}{2}) + \sum_{j=1,2} O\left(\eta(v_0) \cdot \Psi_2(|v_0|) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$$

となる。

§ 3. 2変数の場合.

$$\text{今実行列 } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} C = \cos \theta, S = \sin \theta \\ \text{Siegel の記号} \end{matrix}$$

について、 $1 \gg |d_1|, |d_2| > 0$ を仮定し、実二次形式 $Q(x)$ $\equiv A[x]$ を用意する。又 $\mathbb{R}^2$ 内の有限閉凸多边形 σ を用意して、 σ は辺の个数 $O(1)$ かつ、 σ の各辺の傾きは x -軸の正方向からばかり ρ している時、すべての辺について $Q((\infty \rho)) \neq 0$ となる事を仮定する。

(Lemma 8). $x, y \in \mathbb{R}^2$ について

$$\left| \iint_{\sigma} c(\frac{1}{2}Q(x+y) - \langle x, y \rangle) dx \right| \ll |d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\text{辺}} \log(2+|g|)$$

となる。但し $g = \frac{d_1 \cos^2(\theta-\rho)}{Q((\infty \rho))}$ 。

二次形式 $Q(x)$ と、多边形 σ との関係を更に制限して、すべての辺について $|Q((\infty \rho))| \geq c |d_2 \sin^2(\theta-\rho)|$ 、かつ $Q((\infty \rho)) \neq 0$ 、かつ、 $t(\theta-\rho \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ なくば $|(\theta-\rho) \pmod{\pi}| \geq c$ となる事を仮定する。ここに c は適当な正定数である。初の条件は、 $Q((\infty \rho)) = d_1 \cos^2(\theta-\rho) + d_2 \sin^2(\theta-\rho)$ である事により、どれかの辺について、 $d_1 d_2 < 0$ かつ $|d_1 \cos^2(\theta-\rho)| \asymp |d_2 \sin^2(\theta-\rho)|$ となる事はない事を意味する。最後の条件は、次の Proposition を適用する際に、 σ の適当な三角形分割を行うために、 x_i , y_i -座標の入れかえを考えれば満たされる。

記号を用意する。 $L_1 \equiv \alpha \cos \rho + \beta \sin \rho$, $L_2 \equiv \beta \cos \rho + \gamma \sin \rho$, $R \equiv Q((\infty \rho)) = d_1 \cos^2(\theta-\rho) + d_2 \sin^2(\theta-\rho) = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{vmatrix}$, $\varepsilon_R \equiv \frac{1}{R}$, $g = R^{-1} d_1 \cos^2(\theta-\rho)$, とおく。又、次の Proposition 中の各辺につ

いて P は γ の辺の頂点とする (いふか $\vec{e} + \vec{v}$)。又 $\gamma \in \mathbb{R}^2$ に対し $K_{\vec{a}\vec{b}} = A \times (P + \gamma)$ とおく。又 $\varepsilon_i = \rho_{\vec{a}\vec{b}} d_i$ ($i=1,2$) とおく。更に M_1, M_2 は Lemma 2 の N_1, N_2 の如く。上記諸変数に応じて十分大きく与えべきものとし、 $\log^*$ で、いふやうな $\log$ -factor を表わす事にすれば、上の諸仮定のものと

$$(\text{Proposition 1}) \quad \sum_{m \in \mathcal{L}} e(\frac{1}{2} Q(m+\gamma)) =$$

$$= \sum_{m \in \mathcal{L}} \frac{1}{2} \cdot e(\frac{1}{2} Q(m+\gamma)) + \sum_{m \in A \times (\mathcal{L} + \gamma)} |d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} \cdot e(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\gamma}) \cdot e(-\frac{1}{2} A^T [m] + \langle m, \gamma \rangle) \\ + \left[\tilde{\pi}(\vec{x}_1) \cdot \sum_{m_2} e(\frac{1}{2} Q(\begin{smallmatrix} \vec{x}_1 + \gamma_1 \\ m_2 + \gamma_2 \end{smallmatrix})) \right]_{\substack{\vec{x}_1 = [\vec{q}] \\ \vec{x}_2 = [\vec{q}'] \\ \text{(垂直に上へとのみ)} \\ (m_2 \text{ は } \gamma_2 \text{ のみ})}}^{\substack{\vec{x}_1 = [\vec{q}] \\ \vec{x}_2 = [\vec{q}'] \\ \text{(水平に上へとのみ)} \\ (m_2 \text{ は } \gamma_2 \text{ のみ})}} + \left[\tilde{\pi}(\vec{x}_2) \cdot \sum_{m_1} e(\frac{1}{2} Q(\begin{smallmatrix} m_1 + \gamma_1 \\ \vec{x}_2 + \gamma_2 \end{smallmatrix})) \right]_{\substack{\vec{x}_1 = [\vec{q}] \\ \vec{x}_2 = [\vec{q}'] \\ \text{(水平に上へとのみ)} \\ (m_1 \text{ は } \gamma_1 \text{ のみ})}}^{\substack{\vec{x}_1 = [\vec{q}] \\ \vec{x}_2 = [\vec{q}'] \\ \text{(垂直に上へとのみ)} \\ (m_1 \text{ は } \gamma_1 \text{ のみ})}} \\ + O(|d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathcal{L} \text{ の辺}} \log(2+|l|) \cdot \log(2+M_1) \log(2+M_2))$$

$$\textcircled{1} \dots + \sum_{m \in \mathbb{Z}^2 \cap (A \cdot (\mathcal{L} + \gamma) \text{ の水平線上})} \left(\begin{smallmatrix} - : \text{上への辺} \\ + : \text{下への辺} \end{smallmatrix} \right) \times \tilde{\pi}(\varepsilon_2 \cdot \langle \begin{smallmatrix} -\gamma \\ \vec{c} \end{smallmatrix}, m - k \rangle) \cdot |d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} \cdot e(\frac{\varepsilon_1}{\gamma}) \cdot e(\frac{-1}{2R} \left\{ \langle \begin{smallmatrix} \vec{c} \\ \vec{s} \end{smallmatrix}, m - k \rangle \right\}^2 - \dots) \\ \underbrace{\left(-\langle m, P \rangle + \frac{1}{2} Q(P + \gamma) \right) \times \tilde{\pi}(|d_1|^{-\frac{1}{2}} \left| \langle \begin{smallmatrix} -\gamma \\ \vec{c} \end{smallmatrix}, m - k \rangle \right|)}_{\dots}$$

$$\textcircled{2} \dots + \sum_{m \in \mathbb{Z}^2 \cap (A \cdot (\mathcal{L} + \gamma) \text{ の垂直線上})} \left(\begin{smallmatrix} + : \text{右への辺} \\ - : \text{左への辺} \end{smallmatrix} \right) \times \tilde{\pi}(-\varepsilon_1 \cdot \langle \begin{smallmatrix} \vec{c} \\ \vec{s} \end{smallmatrix}, m - k \rangle) \cdot |d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} \cdot e(\frac{\varepsilon_2}{\gamma}) \cdot e(\frac{-1}{2R} \left\{ \langle \begin{smallmatrix} -\gamma \\ \vec{c} \end{smallmatrix}, m - k \rangle \right\}^2 - \dots) \\ \underbrace{\left(-\langle m, P \rangle + \frac{1}{2} Q(P + \gamma) \right) \times \tilde{\pi}(|d_2|^{-\frac{1}{2}} \left| \langle \begin{smallmatrix} \vec{c} \\ \vec{s} \end{smallmatrix}, m - k \rangle \right|)}_{\dots}$$

$$\textcircled{3} \dots + \sum_{\substack{A \cdot (\mathcal{L} + \gamma) \text{ の水平上へ} \\ \text{垂直に上へとのみ}}} \left(\begin{smallmatrix} - : \text{上への辺} \\ + : \text{下への辺} \end{smallmatrix} \right) \times \sum_{\substack{m \text{ s.t. } |m_1| \leq M_1 \\ |m_2| \leq M_2}} e\left(-\frac{1}{2R} \left\{ \langle \begin{smallmatrix} \text{cop} \\ \vec{a}_P \end{smallmatrix}, m - k \rangle \right\}^2 - \langle m, P \rangle + \frac{1}{2} Q(P + \gamma)\right) \times$$

γ は $\vec{e}$ の条件に依り得るもののみ。

$$\times |d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho_{\vec{a}\vec{b}}(\tan(\theta_P)) \times$$

$$\times \left\{ \left\langle \begin{smallmatrix} \text{cop} \\ \vec{a}_P \end{smallmatrix}, m - k_j \right\rangle \text{ or } j=1,2 \text{ の番号は } \left\{ \begin{smallmatrix} - : \rho_{\vec{a}\vec{b}}(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \tan(\theta_P) \cdot \langle \begin{smallmatrix} \vec{c} \\ \vec{a}_P \end{smallmatrix}, m - k \rangle) \cdot e(\frac{\varepsilon_2}{\gamma}) \cdot \left| \frac{d_2 \varepsilon_2(\theta_P)}{R} \right|^{\frac{1}{2}} \times \end{smallmatrix} \right\} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \times \Psi_{\varepsilon_1} \left(\left| \frac{a_1(0-p)}{R \cdot |d_1|^{\frac{1}{2}}} \right| \cdot \left| \langle \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}, m-k \rangle \right| \right) \\ & + \left\langle \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}, m-k_j \right\rangle \quad j=1, 2 \text{ 2-異なる } m \text{ である} \\ & : \left(\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 \varepsilon_2 a_1(0-p) \cdot \langle \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}, m-k \rangle) \cdot e\left(\frac{\varepsilon_2 R}{8}\right) \cdot \left| \frac{d_2 a_2(0-p)}{R} \right|^{\frac{1}{2}} \\ & \times \Psi_{\varepsilon_2} \left(\left| \frac{a_2(0-p)}{R \cdot |d_2|^{\frac{1}{2}}} \right| \cdot \left| \langle \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}, m-k \rangle \right| \right) \\ & - \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 \varepsilon_2 a_1(0-p) \cdot \langle \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}, m-k \rangle) \cdot e\left(\frac{\varepsilon_1 R}{8}\right) \times \\ & \times \Psi_{\varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_R} \left(\left| d_1 d_2 R \right|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left| \langle \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}, m-k \rangle \right| \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\}$$

となる。ただし、 $\pi = \square$ 等は Lemma 2 の如く、 π の水平または垂直な辺上でのみ扱う事を意味する。又、 $\operatorname{sgn}^* \pi$ は、 π の左にある土の辺のとり方に応じて $\operatorname{sgn}^* \pi$ 又は $\operatorname{sgn} \pi$ にとる事を示す。又、場合分けの中の k_j は、所定の辺の両頂点を P_1, P_2 としてそれに応ずる k を示す。右辺の第一行目の末尾の和が、第一主項である。

これでわかりにくいのので、今、 N を π の直径とすれば、各和に番号 ①, ②, ③ をつけて、

$$(\text{Proposition 2}) \quad \sum_{m \in \pi} e\left(\frac{1}{2} Q(m+r)\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m \in A \times (b+r)} |d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} e\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{8}\right) \cdot e\left(-\frac{1}{2} A^T[m] + \langle m, r \rangle\right) \\ &+ O(1) + O\left(|d_1 d_2|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\pi} l_j^* \cdot \log(2+|l_j|)\right) + O(N \cdot \log^* N)
 \end{aligned}$$

①, ②' + ②, ③: (Proposition 1 のまま)

③' + ③: (Proposition 1 における m に更に $|\langle \begin{pmatrix} -L_2 \\ L_1 \end{pmatrix}, m-k \rangle| \leq |L_1| + |L_2|$ という制限をつける)

と表わされ. 更に ①', ②', ③' 中の m の个数は $O(N+1)$ である.

2変数の $\mathcal{V}$ -Weyl 和は. 複雑ではあるが. 一応まとめた形になった. Proposition 1 の右辺の各和には $\S 2$ から期待される反転公式もあるが. これ以上は眼の毒になりかねないので今回は書かない. 又. 他の場合の扱っても今回は書かない.

文献 [1] Y.-N. Nakai, "On a $\mathcal{V}$ -Weyl sum",
Nagoya Math. J., Vol. 52, 1973, 163/192.