

測度作用素環における単調完備性とその応用

新潟大理 渡辺恵一 (Keiichi Watanabe)

1. 半有限 von Neumann 環に対する非可換積分論はもとより, Haagerup の定義した一般の von Neumann 環に対する非可換 L^p 空間までが, トレースに関する可測作用素の理論に立脚している。von Neumann 環の自己共役元から成る有界単調列は strong operator topology で収束するが, この単調完備性と呼ぶべき性質を, 可測作用素環とその測度位相について考えてみる。可測作用素環では, 列の測度収束を仮定して述べられる多くの命題があるが, これらを単調列に適用しようとするとき, 単調列が測度収束することの簡単な判定条件を知ることは有用と思われる。ここでは σ -compact と呼ばれる可測作用素の十分広いクラスで単調完備性が成り立つことを示し, 系として非可換 L^p 空間ごとの成立を得る。また, 簡単な応用として非可換 L^p 空間にある同値関係を導入し, von Neumann 環の中心の L^p 空間が非可換 L^p 空間の商空間であることを示す。

最後に, この研究会后, 日合先生, 中村先生に $\mathcal{Q}$ -number

を用いた定理1の美しい別証明を教えて頂きましたことと感謝致します。

2. τ -Compact クラスの単調完備性

N を半有限 von Neumann 環, τ を N 上の忠実正規半有限なトレースとする。 N に付属する, 稠密定義域をもつ閉作用素 a に対し, a が τ -可測 $\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists p: N$ の射影, $\|ap\| < \infty, \tau(1-p) \leq \delta$, と定義する。Segal はトレースではかきかわりに, p が strong operator topology で 1 に近 1 になることを定義に用いたが, 上の Nelson による定義の方がうまく働くため, 最近はこの定義が定着したようである。 τ -可測作用素の全体を $\widetilde{N}$ とかく。 $\widetilde{N}$ は閉包をとることによる和, 積, $\ast$ -演算に関して $\ast$ -環となる。0 における近傍系を $\{N(\varepsilon, \delta); \varepsilon, \delta > 0\}$,

$$N(\varepsilon, \delta) = \left\{ a \in \widetilde{N}; N \text{ の射影 } p \text{ が存在して } \begin{aligned} &\|ap\| \leq \varepsilon, \tau(1-p) \leq \delta \end{aligned} \right\}$$

と与えることにより, $\widetilde{N}$ は完備 Hausdorff 位相 $\ast$ -環となる。この位相を測度位相とよぶ。

$a \in \widetilde{N}$ が τ -compact であるとは, $\tau(E_{(\lambda, \infty)}(|a|)) < \infty, \forall \lambda > 0$ がみたされることをいう。ここで $E_{(\lambda, \infty)}(|a|)$ は区間 (λ, ∞) に対応する $|a|$ のスペクトル射影である。このことは a が $L^1(N, \tau)$ の測度位相の閉包に属すること, または

a の一般化された α -number $\mu_\alpha(a) \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$) と同値である (α -number の定義等については [3] 参照)。特に、 τ が有限 τ -スな可測作用素は全て τ -compact である。ここの主な結果は次の通りである。

定理 1. $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \widetilde{N}_+$ の増加列とする。ある τ -compact な $a \in \widetilde{N}_+$ が存在して $a_n \leq a$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) とみたすならば、ある $a_\infty \in \widetilde{N}_+$ が一意に存在して、 a_n は a_∞ に測度収束する。

証明は、strong operator topology での σ -コンパクトの収束から σ -コンパクト射影の収束を導く定理によって、 $\{a_n\}$ の測度収束を引き出す。そのためには [2, Theorem 4.32] の証明と似た議論を二度繰り返せばよい。はじめに、 τ -compact の条件なしで成立する補題をあげ、 $\widetilde{N}_+$ の単調列が測度収束するかをしない元をさがす。

補題 2. $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \widetilde{N}_+$ の増加列とする。ある $a \in \widetilde{N}_+$ が存在して $a_n \leq a$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) とみたすならば、ある $a_\infty \in \widetilde{N}_+$ が一意に存在して $\|a_n^{\frac{1}{2}}\| \uparrow \|a_\infty^{\frac{1}{2}}\|$, $\exists \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$ とみたす。

証明. g_n を a_n が定める quadratic form とする. 即ち,

$$g_n(\xi) = \begin{cases} \|a_n^{\frac{1}{2}} \xi\|^2, & \xi \in D(a_n^{\frac{1}{2}}) \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$g_n(\xi)$ の極限を $g_\infty(\xi)$ とかくと, g_∞ はまた quadratic form である. このとき $D(g_\infty) \supset D(a^{\frac{1}{2}})$, $D(a^{\frac{1}{2}})$ は τ -dense subspace である, g_∞ は densely defined. 各 g_n は下半連続だから, g_∞ もそうである. よってある正の自己共役作用素 Q_∞ が存在して g_∞ は Q_∞ の定める quadratic form とは等しい. すなわち,

$$D(g_\infty) = D(Q_\infty^{\frac{1}{2}}), \quad \|a_n^{\frac{1}{2}} \xi\| \uparrow \|Q_\infty^{\frac{1}{2}} \xi\|, \quad \xi \in D(Q_\infty^{\frac{1}{2}}).$$

$R_n = (a_n + 1)^{-1}$ とかくと, $R_n \geq R_{n+1} \geq R_\infty$ が成り立つ. 各 $R_n \in \mathcal{N}$ だから, ある $S \in \mathcal{N}$ が存在して $R_n \downarrow S$ (strong), $R_n \geq S \geq R_\infty$ を満たす. Spectral theory より, $\mathcal{N}$ に属する正の自己共役作用素 Q' が $S = (Q' + 1)^{-1}$ の形に存在する. Q' の定める quadratic form を g' とかくと, $g_n \leq g' \leq g_\infty$ だから結局 $g' = g_\infty$, つまり $Q' = Q_\infty$ となり, Q_∞ は $\mathcal{N}$ に属する. また $Q_\infty \leq Q$ より Q_∞ は τ -可測でなければならぬ.
q. e. d.

定理 1 の証明. Q_∞ を補題 2 より得られるものとする.

$\{Q_\infty - a_n\}_{n=1}^\infty$ は $\widehat{\mathcal{N}}_+$ の減少列である. 補題 2 の証明と同じ議論で, ある $a' \in \widehat{\mathcal{N}}_+$ が $\|(Q_\infty - a_n)^{\frac{1}{2}} \xi\| \downarrow \|a'^{\frac{1}{2}} \xi\|$,

$\xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$ の様に存在する。 $a_\infty = a_n + (a_\infty - a_n)$ で、正の可測作用素の和は quadratic form sum であるから ([7, Chapter II, Lemma 8]),

$$\|a_\infty^{\frac{1}{2}} \xi\|^2 = \|a_n^{\frac{1}{2}} \xi\|^2 + \|(a_\infty - a_n)^{\frac{1}{2}} \xi\|^2, \quad \xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$$

が成立している。補題 2 より $\|a_n^{\frac{1}{2}} \xi\|^2 \uparrow \|a_\infty^{\frac{1}{2}} \xi\|^2$ であるから、実は $\|a_n^{\frac{1}{2}} \xi\| = 0$, $\xi \in \mathcal{D}(a_\infty^{\frac{1}{2}})$. a' の可測性より $a' = 0$ を得る。従って、 ε の ε -コンパクトの収束は $(a_\infty - a_n + \varepsilon)^{-1} \uparrow 1$, strongly. よく知られているように、 $\varepsilon > 0$ のとき $(a_\infty - a_n + \varepsilon)^{-1} \rightarrow \varepsilon^{-1}$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{C} \setminus (0, \infty]$ が成立する ([2, Theorem 4.28]) により、 $E_{(\varepsilon, \infty)}(a_\infty - a_n) \rightarrow E_{(\varepsilon, \infty)}(0) = 0$, strongly, $\forall \varepsilon > 0$ が導かれる。 $E_{(\varepsilon, \infty)}(a_\infty - a_n) \lesssim E_{(\varepsilon, \infty)}(a)$ であるから、 a が ε -compact である仮定より、

$$\tau(E_{(\varepsilon, \infty)}(a_\infty - a_n)) \leq \tau(E_{(\varepsilon, \infty)}(a)) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

よって、 τ の $\sigma\omega$ -下半連続性により $\tau(E_{(\varepsilon, \infty)}(a_\infty - a_n)) \rightarrow 0$, $(n \rightarrow \infty)$. これは $a_n \rightarrow a_\infty$ (測度位相) を示す。実際、 $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0$ に対し、 $\exists n_0$; $\tau(E_{(\varepsilon, \infty)}(a_\infty - a_n)) \leq \delta$ ($\forall n \geq n_0$) が成り立つ。このとき $e_n \equiv E_{[0, \varepsilon]}(a_\infty - a_n)$ とおくと、 $\|(a_\infty - a_n)e_n\| \leq \varepsilon$, かつ $\tau(1 - e_n) \leq \delta$ となる。これは $a_\infty - a_n \in N(\varepsilon, \delta)$ ($\forall n \geq n_0$) を示すことである。

q. e. d

$a \in \tilde{N}$ に対し, $\|a\|_p^p = \int_0^\infty \mu_x(a)^p dx$ が成り立つ ([3, Corollary 2.8]). 従って非可換 L^p 空間 $L^p(N, \tau)$ は τ -compact 作用素のクラスに含まれている。定理 1 と [3, Theorem 3.6] を結びつけると、次の得る。

系 3. $0 < p < \infty$ とする。 $L^p(N, \tau)_+$ の増加列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して、ある $a \in L^p(N, \tau)_+$ が存在して $a_n \leq a$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) をみたすならば、ある $a_\infty \in L^p(N, \tau)_+$ が一意に存在して、 $\|a_n - a_\infty\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) をみたす。

次に、 M を半有限と限らない一般の von Neumann 環とし、Haagerup の非可換 L^p 空間 $L^p(M)$ を考え、 M と τ_a を与える自己同型群による接合積のトラスに関する λ -number と $L^p(M)$ のノルムについて、 $\mu_x(a) = x^{-\frac{1}{p}} \|a\|_p$, $a \in L^p(M)$ が知られている ([3, Lemma 4.8]). 従って $L^p(M)$ は τ -compact なクラスに含まれている。

系 4. $0 < p < \infty$ とする。 $L^p(M)_+$ の増加列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対して、ある $a \in L^p(M)_+$ が存在して $a_n \leq a$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) をみたすならば、ある $a_\infty \in L^p(M)_+$ が一意に存在して、 $\|a_n - a_\infty\|_p \rightarrow 0$ が成り立つ。

証明. 定理 1 によ $\Rightarrow$ a_∞ : 可測作用素, $a_n \rightarrow a_\infty$ (測度位相) である。Haagerup の L^p 空間は測度位相で閉だから, $a_\infty \in L^p(M)$. さらに L^p -norm 位相は測度位相の相対位相に一致しているから ([7, Chapter II, Proposition 26]), $\|a_n - a_\infty\|_p \rightarrow 0$ が成り立つ。 i. e. d.

(注意) 局所可測作用素と局所測度収束の位相に対しては, τ -compact 性の条件無しに定理 1 に相当する結果が成り立つ ([8, Theorem 3.5])。しかし、測度収束と局所測度収束には微妙な相違がある。実際、有界作用素で上からおさえこんだ増加列で測度収束しないものの簡単な例がある。

数列空間 ℓ^2 の canonical な基底 $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ に関する行列で ℓ^2 上の有界作用素の増加列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ を次の様に定義する。

$$a_n = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_n \text{ は } n\text{-次の単位行列.}$$

このとき $\{a_n\}$ は恒等作用素でおさえられているから、局所測度収束する。しかし測度収束しないことを示すのは容易である。

3. 非可換 ℓ^1 空間のある同値関係について。

C^* -環とその norm 位相に関して [5] が示した可算無限

Asymmetric Riesz 分解性, [1] が導入した同値関係を可換 C^* 環に於いて展開する = と考える。von Neumann 環 M に於いて Haagensen の L^p 空間を $L^p(M)$ で表す。

命題 5. $0 < p < \infty$ とする。 $L^{2p}(M)$ の列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty, \{y_j\}_{j=1}^\infty$ が $\sum_{i=1}^\infty x_i^* x_i = \sum_{j=1}^\infty y_j^* y_j (= a < \infty)$ を満たす $\Rightarrow L^{2p}(M)$ の二重列 $\{z_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$ が存在して次が成り立つ。
 $x_i x_i^* = \sum_j z_{ij} z_{ij}^*, \quad y_j^* y_j = \sum_i z_{ij}^* z_{ij}$.
 (但し、無限和は L^p -(quasi-)norm 収束)

証明は標準的で, $x_i^* x_i \leq a \cdot 1$ より $u_i a^{-1} = x_i$ を満たす投影演算子の元 u_i が実は M の中に入ると示すことに注意する(1)。

いま, $L^p(M)$ の 2π x, y に於いて,

$$x \sim y \iff \exists \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset L^{2p}(M); x = \sum z_n^* z_n, y = \sum z_n z_n^*$$

なる関係を定義する。同値関係であることは、推移的である

ことのみに注意すればよい。 $x \sim y, y \sim z$ とし、 $L^{2p}(M)$ の列 $\{x_i\},$

$\{y_j\}$ によつて

$$x = \sum x_i x_i^*, \quad \sum x_i^* x_i = y = \sum y_j y_j^*, \quad \sum y_j^* y_j = z$$

と書けるとき、命題 5 を y に用いて、 $L^{2p}(M)$ の二重列

$\{z_{ij}\}$ が

$$x = \sum_i (\sum_j z_{ij} z_{ij}^*), \quad z = \sum_j (\sum_i z_{ij}^* z_{ij})$$

を代えるようにとれる。正の元から成る二重列の累次和が存在するとき、どのように加えても和が一致することは単調完備性より導かれる。即ち、

$$\text{命題 6. } 1 \leq p < \infty \text{ とする. } x = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} z_{ij} z_{ij}^* \right), \\ k: \mathbb{N} \ni n \rightarrow (i(n), j(n)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \text{ 任意の全単射} \\ \Rightarrow \left\| \sum_{n=1}^N z_{k(n)} z_{k(n)}^* - x \right\|_p \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

$$\text{特に } x = \sum_{n=1}^{\infty} z_{k(n)} z_{k(n)}^* \sim \sum_{n=1}^{\infty} z_{k(n)}^* z_{k(n)} = z.$$

この同値関係の簡単な応用として、有限なトレース τ を持つ von Neumann 環 N の中心の L^p 空間が $L^p(N, \tau)$ の商空間となることを示す。

$$L^p_0 \equiv \overline{\text{span}} \{ a - b; a, b \in L^p(N, \tau)_+, a \sim b \}$$

なる $L^p(N, \tau)$ の閉部分空間を考える。このとき、

$$(L^p/L^p_0)^* \cong (L^p_0)^\perp = \{ \varphi \in (L^p)^*: \varphi(a) = 0, a \in L^p_0 \}.$$

は等距離同型である。と示すか $\varphi \in (L^p)^*$ に対して、 $\varphi \in (L^p_0)^\perp$

$$\Leftrightarrow \varphi(x^*x) = \varphi(xx^*), x \in L^{2p}(N, \tau) \text{ であるから, } \varphi \text{ は}$$

M 上のトレースを定める。従って $(L^p)^* \cong L^q$ の等距離同型

$$\text{で } \varphi = \tau(a \cdot), a \in L^q(N, \tau) \text{ と書いたとき, } a \text{ は } \mathcal{Z}(N)$$

に付属する。即ち、 $1 \leq p < \infty$ に對して

$$(L^p/L^p_0)^* \cong L^q(\mathcal{Z}(N), \tau)$$

故に ($p=1$ なる predual の一意性により),

$$L^p(N, \tau) / L^p_0 \cong L^p(\mathcal{Z}(N), \tau) \quad \text{等距離同型.}$$

4. 日合先生, 中村先生に教えて頂いた証明は次の通りです。[3, Lemma 2.5] は $\mathcal{A}$ -number のごく基本的な性質なので, これを自由に用いることにします。

定理 1 の別証明. $\forall \varepsilon > 0$ を ε 固定する。 $\forall \delta > 0$ に対し,
 $e = E(\delta, \infty)(a)$ とおくと a は τ -compact である (仮定より),

$$\begin{aligned} \tau(e) < \infty \text{ である。} \quad \text{このとき, } \mu_\varepsilon(a_m - a_n) \\ &\leq \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m - a_n)e) + \mu_{\varepsilon/3}(e^\perp(a_m - a_n)e) + \mu_{\varepsilon/3}((a_m - a_n)e^\perp) \\ &\leq \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m - a_n)e) + 2\mu_{\varepsilon/3}((a_m - a_n)e^\perp) \\ &\leq \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m - a_n)e) + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_m e^\perp) + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_n e^\perp) \\ &\leq \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m - a_n)e) + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_m^{\frac{1}{2}}) \|a_n^{\frac{1}{2}} e^\perp\| + 2\mu_{\varepsilon/6}(a_n^{\frac{1}{2}}) \|a_n^{\frac{1}{2}} e^\perp\| \\ &\leq \mu_{\varepsilon/3}(e(a_m - a_n)e) + 4\mu_{\varepsilon/6}(a)^{\frac{1}{2}} \cdot \delta^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\tau \|a_n^{\frac{1}{2}} e^\perp\| = \|e^\perp a_n e^\perp\|^{\frac{1}{2}} \leq \|e^\perp a e^\perp\|^{\frac{1}{2}} \leq \delta^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

を用いる。 $\tau(e) < \infty$ により,

$0 \leq e a_1 e \leq e a_2 e \leq \dots \leq e a e \in L^1(N, \tau)$ であり, 中には正の実数 λ の $\{\tau(e a_n e)\}$ は λ 収束し,

$$\|e(a_m - a_n)e\|_1 = \tau(e a_m e) - \tau(e a_n e) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

このより $\mu_{\varepsilon/3}(e(a_m - a_n)e) \rightarrow 0$ であるから, 結局

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu_\varepsilon(a_m - a_n) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

これは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が測度位相で Cauchy 列であることを示す
 ([3, Lemma 3.1] 参照)。 $\tilde{N}$ は完備だから $a_{\infty} \in \tilde{N}$ があり、
 $a_n \rightarrow a_{\infty}$ 。 明らかに $0 \leq a_n \leq a_{\infty} \leq a$ である。 q. e. d.

References

1. J.Cuntz and G.K.Pedersen, Equivalence and Traces on C^* -algebras, J.Funct.Anal., 33(1979), 135-164.
2. E.B.Davis, One-parameter semigroups, Academic Press, 1980.
3. T.Fack and H.Kosaki, Generalized s-numbers of τ -measurable operators, Pacific J. Math., Vol.123, No.2(1986), 269-300.
4. U.Haagerup, L^p -spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra, Colloq. Internat. CNRS, NO.274, 1979, 175-184.
5. R.Kadison and G.K.Pedersen, Equivalence in operator algebra, Math.Scand., 27(1970), 205-222.
6. E.Nelson, Notes on non-commutative integration, J.Funct.Anal., 31(1979), 139-149.
7. M.Terp, L^p -spaces associated with von Neumann algebras, Notes, Copenhagen Univ., 1981.
8. F.J.Yeadon, Convergence of measurable operators, Math.Proc.Camb. Phil.Soc., 74(1973), 257-268.
9. K.Watanabe, Equivalence on non-commutative L^p -spaces, preprint.
10. _____, A note on monotone order completeness of measure topology associated with von Neumann algebras, preprint.