

散逸力学系 (写像) に対する Tsallis entropy による記述

茨城大学 工学部 電気電子工学科 和田 達明¹

茨城大学 理工学研究科 SVBL 斎藤 健²

散逸力学系における軌道の初期値鋭敏性や軌道混合性の時間発展の指数的あるいはべき的な振る舞いは、Tsallis エントロピ S_q 及び固有なエントロピ指数 q^* を用いて統一的に記述できる事を、Logistic 写像を例に説明する。その際に、散逸系の長時間相関やメモリ効果が q -指数関数によって何如に記述されるのかを議論する。

1 はじめに

Tsallis 統計力学 [1, 2] は、従来の Boltzmann-Gibbs 統計力学の 1 実数パラメータ q による拡張であり、指数関数やべき関数で記述される現象の両者をパラメータ q により、統一的に記述できる。通常のエントロピは示量性が成立するが、示量的でないエントロピに基づく統計力学の拡張が、Tsallis 統計力学である。

Tsallis エントロピに基づく研究は広範だが、ここでは、摩擦や散逸と関連して、初期値依存性、メモリ効果や長時間相関という現象を、Tsallis エントロピに基づき、どのように記述されるのかという点に注目する。Tsallis 統計力学は未だ発展途上の分野であり、パラメータ q の物理的意味等という基本的な事柄が未だ良く判っていない。しかし、Tsallis 等 [3] による散逸写像や (非) 線型力学系の時間発展の研究において、軌道のべき的混合性は、長時間相関 (メモリ効果) に基づいていて、位相空間におけるアトラクタのフラクタル性に関連している事が示唆されている。更に、系の複雑性を特徴づける量である固有なエントロピ指数 q^* の存在は、 q に物理的な意味がある事を示唆しているようでもある。

本報告では、簡単な散逸力学系である Logistic 写像の時間発展に対して、カオスの縁において出現する軌道の初期値鋭敏性のべき則を特徴づける、系に固有の Tsallis エントロピ指数 q^* について説明し、その決定法及び物理的機構について議論する。 q 指数関数で表わされるべき則の背後には、系の長時間相関 (メモリ効果) が関与しており、初期値に対する強い依存性は、物理的には q 指数関数の因子に分離できない性質で表現されている事が判った。

¹ E-mail:wada@ee.ibaraki.ac.jp

² E-mail:saito@hcs.ibaraki.ac.jp

2 背景：Tsallis 統計力学(熱力学)

1988年に C. Tsallis[1] は、「マルチフラクタルにみられる確率のベキ分布を、エントロピ最大原理に基づいて説明できるか？」という動機の下に、以下の q という実数パラメータによる一般化エントロピ

$$S_q = \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q-1}, \quad \left(\sum_i p_i = 1; q \in \mathcal{R} \right) \quad (1)$$

を導入した。その最大の特徴は、同時確率分布が $p_{i,j}^{A,B} = p_i^A p_j^B$ となる統計的独立な系 A, B に対して成立する擬加法性 [1, 2]

$$S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (2)$$

であり、この擬加法性を通じて、 q は S_q の非示量性を特徴づけていると考えられている。

確率保存則と q -期待値と呼ばれる量を一定とする拘束条件の下で、 S_q が最大となる分布は、

$$p_i \propto [1 - \beta'(1-q)\epsilon_i]^{\frac{1}{1-q}} \quad \left(\propto \epsilon_i^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{for } \epsilon_i \gg 1 \right) \quad (3)$$

のようにベキ分布となる。ここで q 指数関数と呼ばれる

$$\exp_q(x) \stackrel{\text{def}}{=} [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \quad (4)$$

を導入すると $p_i \propto \exp_q(-\beta'\epsilon_i)$ と書け、通常の指数分布に対するパラメータ q による拡張である事が判り易く便利である。 q 指数関数は、 $\lim_{q \rightarrow 1} \exp_q(x) = \exp(x)$ を満たし、ベキ関数と指数関数を統一して扱うことができ、ベキ的振る舞いを示す様々な現象の記述へ応用が広がっている。この q 指数関数に基づく、散逸写像における軌道の初期値鋭敏性及び Tsallis エントロピの時間発展について次章で説明する。

3 1次元散逸写像に対する Tsallis エントロピによる記述

ここでは、簡単な Logistic 写像、

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2, \quad (t = 0, 1, 2, \dots, \quad -1 \leq x_t \leq 1, \quad 0 \leq a \leq 2) \quad (5)$$

に基づき、軌道の初期値鋭敏性及び Tsallis エントロピによる記述 [3] について議論する。Logistic 写像における軌道の振る舞いは、パラメータ a によって以下の2つの領域に分類できる事が判っている。

- 周期領域: $a < a_c \equiv 1.401155198$ λ_1 は負。初期値に依らない!
- カオス領域: $a \geq a_c$ 、 $\lambda_1 > 0$

カオス領域においては、カオスを特徴づける初期値鋭敏性

$$\xi(t) \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} \quad (6)$$

という、初期時刻 $t = 0$ において、無限小 $\Delta x(0)$ だけ離れた 2 つの軌道が、時刻 t においてどれだけ離れるのかを表わす量が用いられる。通常は、 $\xi(t) = \exp(\lambda_1 t)$ が成立し、軌道の初期値鋭敏性は指数的で、Lyapunov 指数 λ_1 を用いて特徴づける事ができる。

では、カオス領域と周期領域の境であるカオスの縁 ($a = a_c$) において $\lambda_1 = 0$ となる場合はどうなるのだろう？Tsallis 等 [3] は、

初期値鋭敏性は、一般化 Lyapunov 指数 λ_q に基づく、ベキ則 $\xi(t) = \exp_q(\lambda_q t)$ に従う

という予想を提案した。まとめると Logistic 写像は、 $a > a_c$ での強いカオス領域では、 $q = 1, \lambda_1 > 0$ で、軌道は指数混合となり、通常の S_1 エントロピで記述される示量的な系となる。一方、 $a = a_c$ の弱いカオス領域では、 $q < 1, \lambda_1 = 0, \lambda_q > 0$ というベキ混合領域であり、 S_q という非示量的エントロピで記述されるのである。

3.1 系に固有なエントロピ指数 q^*

力学系の時間発展は、 S_q エントロピで記述でき、系に固有のエントロピ指数 q^* が存在する事が判っている。現在までに知られている q^* の求め方 [1] は、次の 3 つである。

- i) 初期値鋭敏性 $\xi(t)$ の指数: $\xi(t) \propto t^{\frac{1}{1-q^*}}$
- ii) 分布のマルチフラクタル性: $\frac{1}{1-q^*} = \frac{1}{\alpha_{min}} - \frac{1}{\alpha_{max}}$
- iii) 一般化エントロピが時間に比例: $S_{q^*}(t) \propto t$

ここでは、iii) の方法について説明するが、その前に、通常の数値的軌道混合性の場合について成立する Kolmogorov-Sinai エントロピ速度と分布のエントロピ S_1 との関係 [4] を説明しよう。

一般に $S_1(t)$ の振舞いは、1) 系の詳細や初期分布に依存する領域、2) 時刻 t に比例して増加する領域、3) 漸近的にある一定値に近づく領域の 3 つに分類できる。領域 2) において、以下の関係が成立する。

$S_1(t)$ の傾きが、KS エントロピ速度 κ に等しい。

この関係が $q \neq 1$ の場合へ拡張できるという予想に基づき、上記 iii) の系に固有なエントロピ指数 q^* の決定法が提案された。

3.2 Logistic 写像における一般化エントロピの時間発展

実際に、Tsallis 等 [3] に従って、Logistic 写像における S_q の時間発展を計算した結果を以下に示す。図 1 は、カオス領域 ($a = 2.0$) における S_q の時間発展を、ランダムに選んだ初期値に対して平均をとった結果である。 $q = 1$ において S_q が t に比例する領域が存在するので、 $q^* = 1$ である事が確認でき、軌道の混合性が指数関数的であることが判る。

一方、カオスの縁 ($a = a_c \equiv 1.40115519$) においては、図 2 に示すように固有なエントロピ指数は $q^* = 0.2445$ で、軌道の混合性はベキ的であることが確認できた。Tsallis 等も指摘している

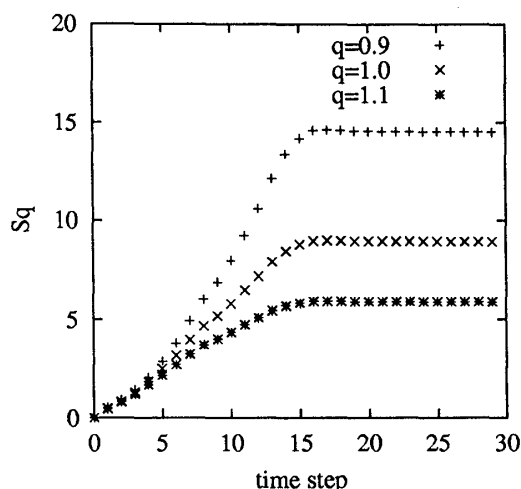


図 1: Logistic 写像 カオス領域 ($a = 2.0$).
 $q^* = 1 \Rightarrow$ 指数則

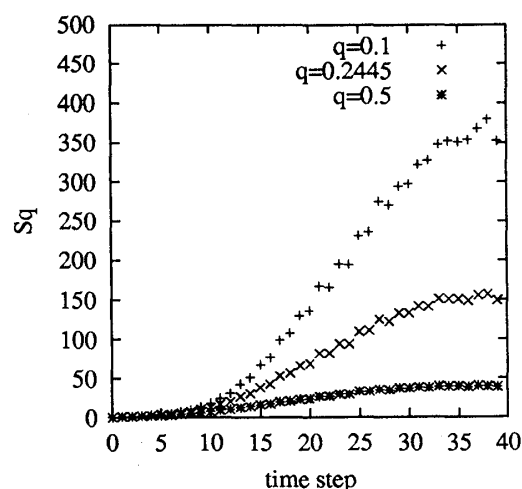


図 2: カオスの縁 ($a = a_c$). $q^* = 0.2445 \Rightarrow$ ベキ則

様に、この場合の S_q の計算には初期条件 (セル) の選択に注意を要する。これは、ベキ的振る舞いを示す場合には、初期値に対する依存性が強く、長時間相関がある為、ランダムに選んだ初期値に対する平均をとってはいけないうことによる。図 3 に、図 2 の計算に用いた初期セルを選ぶ方法を説明する。横軸は初期セルの位置を表わし、 $0 \leq x \leq 1$ を、 W 個のセルに等分割した。縦軸は、ある 1 つのセル内に N 個の点を一様分布させて、50 ステップの時間発展に対する、空でないセルの数の積算であり、多い程、軌道が良く広がる初期セルであることを示している。破線で示した 8000 以上の積算数となる初期セルに対して、 S_q の時間発展を平均した結果が図 2 である。

4 散逸写像における軌道のアトラクタへの収束

今度は、同じ Logistic 写像のカオスの縁 $a = a_c$ の場合に、位相空間を $W(0)$ 個のセルに等分割し、初期条件として N 個の点を位相空間中に一様に分布し、その後の時刻 t における、空でないセルの数 $W(t)$ を調べた [5]。結果は、図 4 のよう $W(t)$ は、ベキ的に減衰し、 $q^* = 2.4$ で記述できる事が判る。初期条件及び注目している過程が異なるので、 q^* は先の図 2 の場合 ($q^* = 0.2445$) とは違うことに注意。

$$W(t) = W(0) [1 + (1 - q)\lambda_{q^*} t]^{-\frac{1}{1-q^*}} = W(0) \exp_{q^*}[\lambda_{q^*} t] \propto t^{-0.708} \rightarrow q^* \approx 2.4 \quad (7)$$

また、フラクタル系特有の $\log$ 周期振動 [6] がみられ、この散逸現象がアトラクタの空間的フラクタル構造に関連している事が示唆されている。

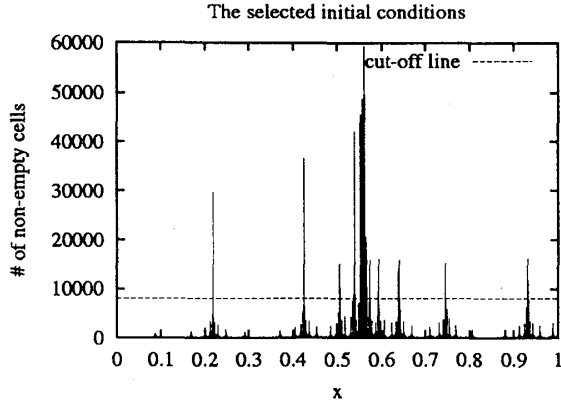


図 3: $W = 10^4$ cells, $N = 10^5$ 個, 50 step の積算に対する結果。破線は > 8000 のボーダラインを示している。

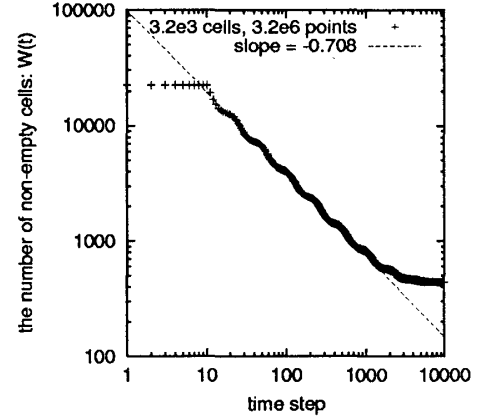


図 4: $W(0) = 3.2 \times 10^3$, $N = 3.2 \times 10^6$ の場合の空でないセルの数 $W(t)$ の時間変化。

5 長時間相関の q 指数関数表現

上記に示した散逸系における時間発展のべき的性質の起因となる長時間相関が、式 (4) の q 指数関数によって何如に表現されているのかを説明する。

q 指数関数の積は、引数の擬加法性として次のように表わされる。

$$\exp_q[x] \cdot \exp_q[y] = \exp_q[x + y\{1 + (1 - q)x\}] \quad (8)$$

これより、

$$\exp_q[s + t] = \exp_q[s] \times \exp_q\left(\frac{t}{1 + (1 - q)s}\right) \quad (9)$$

という、 $q \neq 1$ では独立な因子に分離できない性質がある事が判る。 $q = 1$ では、通常の指数関数に帰着し、 $\exp(s + t) = \exp(s) \cdot \exp(t)$ のように因子化できる。

よって、 q 指数関数による時間発展は、

$$\exp_q[t_1 + t_2 + t_3 + \dots] = \exp_q[t_1] \times \exp_q\left(\frac{t_2}{1 + (1 - q)t_1}\right) \times \exp_q\left(\frac{t_3}{1 + (1 - q)(t_1 + t_2)}\right) \times \dots \quad (10)$$

のように、連鎖的に初期時刻 t_1 の影響を引きずることになる。これが、長時間相関 (メモリ効果) の q 指数関数による物理的描像である。

6 $S_{q^*}(t|0) \propto t$ となる理由

カオスの縁において、初期値鋭敏性 $\xi(t)$ が

$$\xi(t) \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)} = \exp_{q^*}(\lambda_{q^*} t), \quad (11)$$

で記述されるベキ則に従うように、空でないセルの数 $W(t)$ の時間発展がベキ則に従うとする：

$$W(t) = W(0) \exp_{q^*}(\lambda_{q^*} t). \quad (12)$$

ここで、条件付き Tsallis エントロピ [7] を導入すると、

$$S_q(t|0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_q(t) - S_q(0)}{1 + (1 - q)S_q(0)} = \frac{\ln_q W(t) - \ln_q W(0)}{W(0)^{1-q}} = \ln_q \left[\frac{W(t)}{W(0)} \right] = \ln_q [\exp_{q^*}(\lambda_{q^*} t)], \quad (13)$$

ここで以下の関係式を用いた： $\ln_q[y/x] = (\ln_q y - \ln_q x)/x^{1-q}$ 。ゆえに、 $q = q^*$ の時にのみ、 $S_q(t|0) \propto t$ となる。つまり、 W が $\exp_{q^*}$ に従うので、 S_q としてその逆関数 $\ln_q$ を用いと、エントロピ指数 q が q^* に等しい時に互いに同じ指数 q^* を持つ逆関数となるのである。これより非加法的エントロピ $S_q(t|0)$ を用いて、加法的な記述が可能となる。

7 まとめ

1 次元散逸力学系である Logistic 写像に対する Tsallis エントロピ S_q に基づく記述について議論した。Tsallis エントロピは、ベキ則と指数則を統一した枠組を提供する。

系に固有なエントロピ指数 q^* が存在し、 $q = q^*$ の時にのみ、 $S_q(t|0)$ は t に比例するという要請により q^* を求める事ができ、Logistic 写像に対して確認を行なった。 $q^* \neq 1$ のベキ的な場合は、 S_q の時間発展の初期値依存性が強いので、平均をとる初期値を注意深く選ぶ必要がある事を確認した。

また、 q 指数関数の因子化できない性質により、長時間相関が表現されている事が判った。こういった枠組が、将来、摩擦の機構の物理的理解に役立つ事を期待する。

参考文献

- [1] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52** (1988), 479; Braz. J. Phys. **29** (1999), 1; cond-mat/0010150.
- [2] 阿部純義, 数理科学 439 (2000), 71-80.
- [3] C. Tsallis *et. al*, Chaos, Solitons and Fractals, **8** (1997), 885; M.L. Lyra and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 53; U. Tirnakli *et. al*, cond-mat/0005210; L. Fronzoni *et. al*, Chaos, Solitons and Fractals, **11** (2000), 2361-2369.
- [4] V. Latora and M. Baranger, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 520; M. Baranger *et. al*, cond-mat/0007302.
- [5] F.A.B.F. de Moura *et. al*, cond-mat/0008130.
- [6] R.O.Vallejos *et. al*, Phys. Rev. E **58** (1988), 1346-1351.
- [7] S. Abe, Phys. Lett. A **271** (2000), 74-79; quant-ph/0001085.