

WKB 型微分作用素に対する Stokes 図形の 具体例に就いて

近畿大理工 青木 貴史* (AOKI, Takashi)

京大数理研 河合 隆裕** (KAWAI, Takahiro)

京大理 小池 達也† (KOIKE, Tatsuya)

京大数理研 竹井 義次†† (TAKEI, Yoshitsugu)

我々が [AKKT1] で導入した “WKB 型の微分方程式” の WKB 解は一般に無限個の phase を持つ。例えば, その最も簡単な例として

$$(1) \quad P\psi = 0,$$

但し

$$(2) \quad P = \cosh\left(\sqrt{\frac{1}{i\eta} \frac{d}{dx}}\right) - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{1}{i\eta} \frac{d}{dx}\right)^n - x, \quad (\eta \text{ は大きなパラメタ})$$

を考えると方程式 (1) の WKB 解として, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$(3) \quad \psi_n = \exp\left(\eta \int^x f_n(x) dx + (\eta \text{ に関し } 0 \text{ 次以下})\right),$$

但し $f_n(x)$ は然るべく $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ の分枝を定めて

$$(4) \quad i(\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + 2in\pi)^2$$

に依り定めた函数, なるものを構成できることは容易に確かめ得る。従って ψ_n の一次結合を考えれば (1) の解としてその phase が無限に異なるものを作ることができる。このように phase が無限個許される方程式に対して一般にはその Stokes 曲線の大域的挙動は極めて複雑なものと

* 科学研究費 No.12640195 及び No.14340042 の援助を受けた。

** 科学研究費 No.14340042 の援助を受けた。

† 科学研究費 No.13740096 及び No.14340042 の援助を受けた。

†† 科学研究費 No.13640167 及び No.14340042 の援助を受けた。

なることが予想されるが、その場合でも [AKT1] が提唱した“仮想的変わり点” ([AKT1] では“新しい変わり点”と呼んでいる) から出る Stokes 曲線を考えることに抛り, [BNR] が最初に指摘した, 通常の Stokes 図形に内在する矛盾が解消されるか否かは興味深い問題と思われる. 近刊の [AKKT2] では (2) 式的作用素を含めたいくつかの例に就て“仮想的変わり点”がその種の矛盾の解消に有効であるかを詳細に論じ, 又, 得られた結果の正当性を最急降下法を用いて検証している. (上述の具体例の場合, 方程式 (1) はラプラス型故解の積分表示ができることを利用する.) ただ, 問題の難しさを反映して [AKKT2] の議論は例えば (2) で与えられる作用素は比較的簡明な形であるにもかかわらず, かなり複雑な構成となっており, 読者に重苦しい感を与えるのではないかと云う気がしないでもない. そこで以下 [AKKT2] の議論の要となる所を列挙して [AKKT2] のサブノートを作ってみたいと思う. 本稿で, この問題に興味を持たれた方は是非 [AKKT2] を読んで頂きたいと願っている.

さて, 方程式 (1) に関し特徴的なことはその変わり点 $x = \pm 1$ から出る Stokes 曲線が無限重に重なっていて一見した所簡単に見えながら実はその順交叉の解消を構成的に行おうとすると無限回の手続きが必要になる, と云うことである. 勿論, “無限個の仮想的変わり点を考え, そこから出る Stokes 曲線をすべて考える”と云う超越的な議論を行えばすべての順交叉が一気に解消される. ただ, このように超越的な議論を行なうにはやはり“ヘソ”とも謂うべき点, 即ち仮想的変わり点, を最初に見つけておくことが極めて有用であることは間違いない. ([AKT1] の着想の勝利!)

[要点 1] (i) $x = 1$ から出る Stokes 曲線は

$$(5) \quad \operatorname{Im} \int_1^x (f_n(x) - f_{-n}(x)) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と云う式で与えられ, この曲線を $\sigma_{n,-n}^+$ と記す. この時対応する WKB 解の dominance relation は $\operatorname{Im} x > 0$ なる部分で “ $n > -n$ ” となっている. 又, (5) 式は,

$$(6) \quad \operatorname{Im} \int_1^x \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx = 0$$

とも書けるから, (5) で定められる曲線はすべて同一である.

(ii) $x = -1$ から出る Stokes 曲線は

$$(7) \quad \operatorname{Im} \int_{-1}^x (f_{n-1}(x) - f_{-n}(x)) dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

により与えられる. この曲線を $\sigma_{n-1,-n}^-$ と記す. この曲線の $\operatorname{Im} x > 0$ なる部分での WKB 解の dominance relation は “ $n - 1 < -n$ ” である. (i) の場合と同じく, (7) は次式と同値である.

$$(8) \quad \operatorname{Im} \int_{-1}^x (\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) - i\pi) dx = 0$$

[要点 2] 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\sigma_{n-1,-n}^-$ と $\sigma_{n,-n}^+$ は順交叉し, $\sigma_{n,-n-1}^-$ と $\sigma_{n,-n}^+$ も亦順交叉する.

注意: $\sigma_{n-1,-n}^-$ と $\sigma_{n,-n}^+$ は 2 ヶ所で交わるが, そのいずれもが順交叉点である. $\sigma_{n,-n-1}^-$ と $\sigma_{n,-n}^+$ の対に就ても同様.

[要点 3] $w = \tan w$ の正の根を大きさの順に

$$(9) \quad 0 < w_1 < w_2 < w_3 < \cdots$$

と番号付けする時

$$(10) \quad -1 < \cos w_1 < -\cos w_2 < \cos w_3 < \cdots < -\cos w_3 < \cos w_2 < -\cos w_1 < 1$$

が成立つ. 又, 方程式 (1) の仮想的変わり点は

$$(11) \quad x_{k,l} = (-1)^l \cos w_k \quad (k, l \in \mathbb{N})$$

に抛り与えられる.

[要点 4] (i) 正の仮想的変わり点 $|\cos w_k|$ を通る Stokes 曲線 $\sigma_{n,m}^{0+}$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) は

$$(12) \quad \operatorname{Im} \int_{|\cos w_k|}^x (f_n(x) - f_m(x)) dx = 0,$$

但し $n+m=k \in \mathbb{N}$ かつ $n-m \geq 1$, に抛り与えられる. さらに (12) は

$$(13) \quad \operatorname{Im} \int_{|\cos w_k|}^x (\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + ik\pi) dx = 0,$$

とも表示できる. 又, $\operatorname{Im} x > 0$ の部分に於いて $\sigma_{n,m}^{0+}$ 上での WKB 解の dominance relation は “ $n > m$ ” となっている.

(ii) 負の仮想的変わり点 $-|\cos w_k|$ を通る Stokes 曲線 $\sigma_{n,m}^{0-}$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) は

$$(14) \quad \operatorname{Im} \int_{-|\cos w_k|}^x (f_n(x) - f_m(x)) dx = 0,$$

但し $n+m=-k-1$ ($k \in \mathbb{N}$) かつ $n-m \geq 1$, に抛り与えられる. さらに (14) は

$$(15) \quad \operatorname{Im} \int_{-|\cos w_k|}^x (\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) - i(k+1)\pi) dx = 0$$

とも表示される. 又, $\operatorname{Im} x > 0$ の部分に於いて, $\sigma_{n,m}^{0-}$ 上での WKB 解の dominance relation は “ $n < m$ ” となっている.

[要点 5] $\sigma_{p,q}^{0+}$, $\sigma_{r,s}^{0-}$ はいずれも (6), (8) の共通零点 $x_0, -x_0$ を通る.

以上を一枚の図にまとめると次のようになる.

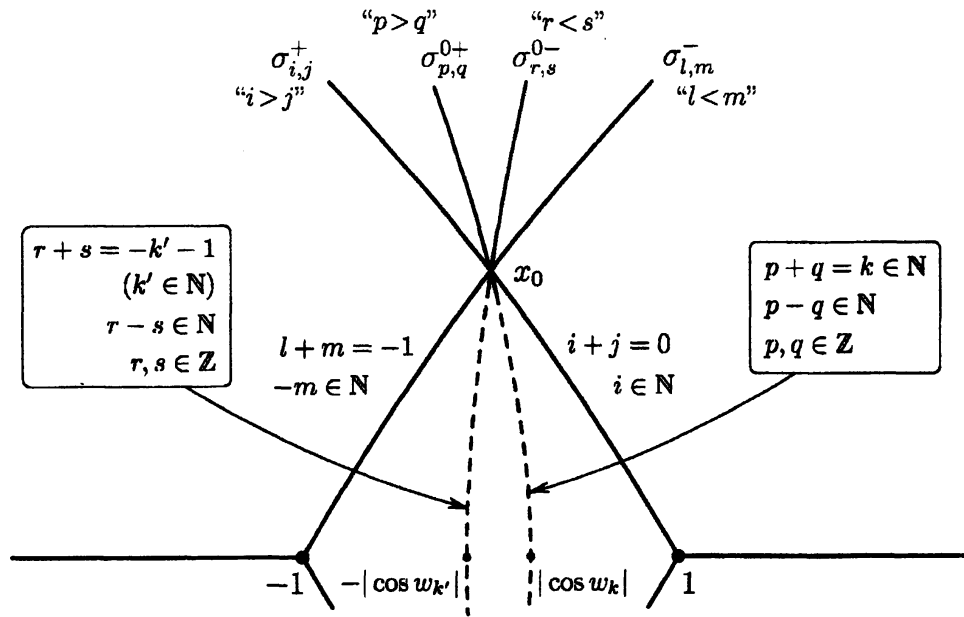


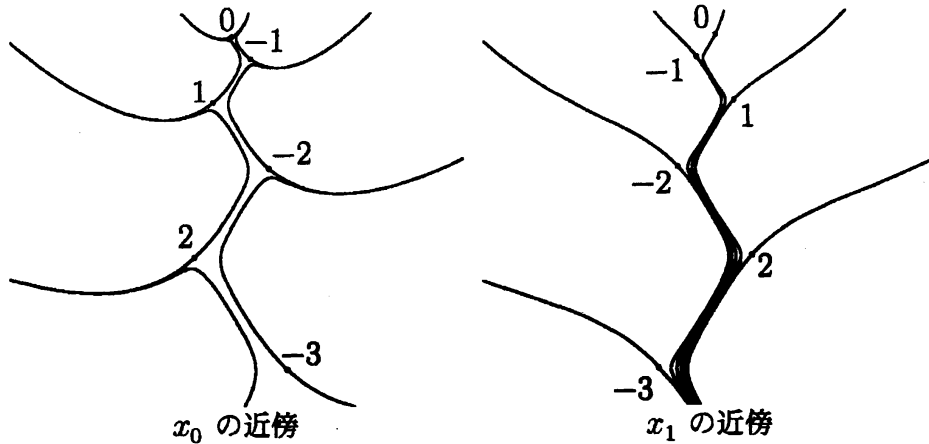
Figure 1

[要点 6] $\sigma_{p,q}^{0+}$ ($p + q = k \in \mathbb{N}, p - q \in \mathbb{N}$), $\sigma_{r,s}^{0-}$ ($r + s = -k' - 1$ ($k' \in \mathbb{N}$), $r - s \in \mathbb{N}$), $\sigma_{i,j}^+$ ($i + j = 0, i \in \mathbb{N}$), $\sigma_{l,m}^-$ ($l + m = -1, -m \in \mathbb{N}$) のすべてを考えれば順交叉はすべて解消される。

[観察 1] 順交叉を逐次解消して行こうとすると“きりが無い”。例えば $\sigma_{0,-1}^-$ と $\sigma_{1,-1}^+$ は Figure 1 の x_0 で順交叉している。これは $\sigma_{1,0}^{0+}$ に依り解消される。所が $\sigma_{1,0}^{0+}$ は $\sigma_{1,-2}^+$ とやはり x_0 で順交叉する。これを解消するには $\sigma_{0,-2}^{0-}$ を要する。所が $\sigma_{0,-2}^{0-}$ と $\sigma_{2,-2}^+$ は又々 x_0 で順交叉する.... これではもう賽の河原だ。尤もまあボーナスもあって $\sigma_{0,-2}^{0-}$ は、 $\sigma_{1,-2}^-$ と $\sigma_{1,-1}^+$ の成す順交叉を解消するべく考える $\sigma_{-1,-2}^{0-}$ が $\sigma_{0,-1}^-$ と成す順交叉の解消も同時に行っている。こんなややこしい状況のすっきりした解釈には [AKKT2, § 3.2] のように或る種のグラフの reduction と云う表現を用いるのが便利である。詳しくは [AKKT2, § 3.2] の最後の部分を参照されたい。

[観察 2] [AKT1] の“提案”で実用的に見て重要な点の一つは仮想的変わり点から出る Stokes 曲線のどの部分が実際の Stokes 現象に関係するか、と云うことの criterion であろう。この点に就て最急降下法に拠り得られた結果は我々の得た Stokes 図形の主張する所とよく一致している。

[観察 3] 虚軸上で $\text{Im } x > \text{Im } x_0$ なる部分と $\text{Im } x < -\text{Im } x_0$ なる部分とは Stokes 図形で観察される状況は似ているが、最急降下路の様子はかなり異なる。このことは、実は [AKKT2] で導入したグラフ $G(x_0)$ と $G(x_1)$ ($x_1 = -x_0$) (cf. [AKKT2, (3.48), (3.50)]) の構造の差を反映していて中々面白いと思われるので、 x が x_0 の近傍にある時の最急降下路と x が x_1 の近傍にある時の最急降下路を各々下に図示しておく。



以上, 作用素 P が (2) の形の時に仮想的変わり点の概念がどのように通常の Stokes 図形に内在する矛盾 (順交叉の存在) の解消に有用であるかを見てきた. もう一つ, (2) とかなり毛色の違った作用素

$$(16) \quad P = P_0(x, \eta^{-1} \frac{d}{dx}) + \eta^{-1} P_1(x, \eta^{-1} \frac{d}{dx}),$$

但し, ここで

$$(17) \quad P_0(x, \eta^{-1} \frac{d}{dx}) = (i\eta^{-1} \frac{d}{dx} - x) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{i\eta^{-1} d/dx}{n^2}),$$

$$(18) \quad P_1(x, \eta^{-1} \frac{d}{dx}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n^2} \prod_{p \geq 1, p \neq n} (1 - \frac{i\eta^{-1} d/dx}{p^2}),$$

$$(c_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 < \infty)$$

に対して方程式 (1) を考え, その Stokes 図形がどうなるかを考えてみよう.

[要点 7] この場合, 通常の変わり点は $x = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) であり, しかもそれ等は皆 2 重変わり点である. (この事実が [要点 8] で触れる仮想的変わり点の見つけ方の背景に在る.) 変わり点 $x = n^2$ を通る Stokes 曲線は

$$(19) \quad \operatorname{Im} i \int_{n^2}^x (x - n^2) dx = 0$$

に拠り与えられる.

[要点 8] $x = n^2$ を通る Stokes 曲線と $x = m^2$ ($m \neq n$) を通る Stokes 曲線はすべて順交叉し, その順交叉を解消する為に必要な仮想的変わり点は [AKT2] の “陪特性グラフ” の方法で見つかる: $x = (n^2 + m^2)/2$ がその方法で見つけられる仮想的変わり点である.

[観察 4] [要点 8] を用いて得られる Stokes 図形は (16) で与えられる作用素 P に抛りと与えられる方程式 $P\psi = 0$ の解の積分表示に対し最急降下法を適用して得られる結果とよく一致している。但し、今の場合、解の積分表示の被積分函数が特異点を有し、その点も亦一種の鞍点と考えねばならない ([KT] 参照) ことには注意を要する。

以上の議論を踏まえての結論は次のようなものとなる: WKB 型微分作用素に対しても仮想的変わり点は Stokes 図形の完成の為に本質的に有用な概念である。

文献

- [AKKT1] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases. Adv. in Math. に近刊予定.
- [AKKT2] ———: On global aspects of exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases. RIMS Preprint No. 1392 (2003).
- [AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations. Analyse algébrique des perturbations singulières, I. Hermann, 1994, pp.69–84.
- [AKT2] ———: Exact WKB analysis of non-adiabatic transition probabilities for three levels. J. Phys. A, **35** (2002) 2401–2430.
- [BNR] H. L. Berk, W. M. Nevins and K. V. Roberts: New Stokes' line in WKB theory. J. Math. Phys., **23** (1982), 988–1002.
- [KT] T. Koike and Y. Takei: The effect of new Stokes curves in the exact steepest descent method. Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis, World Scientific, 2002, pp.186–199.