

半無限平板を過ぎる非定常流

について

ケンブリッジ大正教 徳田 尚之^{*}

§1. 序

半無限平板を粘性流体中にインピュルス的に板に沿ってある一定速度 U で動かした場合に生じる非定常粘性流の問題を論じる。この問題は Stewartson が 1951 年に最初に論文を発表して以来多くの人により研究されている。その代表的なものとしては Lam & Crocco (1958), 赤松と神元 (1966), Hall (1969), Donnio (1971) などがある。Lam & Crocco, Hall, Donnio の論文は Stewartson の考えに基づいた境界層式を用いたの数値解析であり、Stewartson が最初に予想した傾向を示している。

今迄この問題を扱った論文は総べて Navier-Stokes の式と近似した境界層の式に基づいている。本論文ではもと根本から問題を見直した。ここで我々は Navier-Stokes の式はこの問題の

^{*} 現住所 東京都文京区亀戸 3-6-22, 301.

時間と空間を含めた全領域に亘り、て成り立つという事を前提として出発する。それらをその第一近似として境界層の式を導き、その近似の前提となる漸近展開法をまず示し、それに一致するある境界層の解を求めた。この漸近解は次の様な条件を満たさなければならぬ。

1. ある大きさ(又は小)のパラメータを用いて系統的な漸近解を求めなければならぬ。
2. この漸近解が厳格に意味で成り立つている場合には、任意の高次項まで解を求める必要はない。
3. 各次の解はその近似に一致したオーダーのものでなければならぬ。

少なくとも幾つか求める漸近解が正しいものである事を示すには、上の三つの条件を満たさなければならぬ。この事により、次章に述べる様な Stewartson を含んでいる色々な意味での物理的矛盾を説明する事が出来る。

§ 2. Stewartson の境界層式への解.

前章からの距離 x を充分大きい所の流れを考える。 $U_{\infty} \gg 1$ とし、この問題で境界層の式が成り立つと仮定すると、平板上の非定常粘性流れの境界層の式は次の如く書ける。

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.2)$$

境界条件並びに初期条件は

$$y^* = 0, \quad u^* = v^* = 0 \quad (2.3)$$

$$y^* \rightarrow \infty, \quad u^* \rightarrow U \quad (2.4)$$

$$x^* \rightarrow 0, \quad u^* \rightarrow u_B \quad (2.5)$$

$$t \rightarrow 0, \quad u^* \rightarrow U \quad (2.6)$$

$$t^* \rightarrow \infty, \quad u^* \rightarrow u_B \quad (2.7)$$

こゝに y^* は垂直方向距離で、 u^* と v^* は x^* , y^* 方向の速度成分を示す。 u_B は Blasius の流れを示す。

初期条件として時刻 $t=0$ の時は流れは一樣流であるべきだが、 $t \rightarrow 0$ の小さな時刻の領域の中では、流れは無限平板の Rayleigh の解に近づく。又 $t \rightarrow \infty$ に行けばこの非定常解は定常解の Blasius の解に近づく筈である。

次の様に無次元変数を定義する。

$$\eta = y^* / \sqrt{\nu x^*}, \quad \tau = U t / x^*, \quad u = u^* / U, \quad \psi = \psi^* / \sqrt{\nu U x^*} \quad (2.8)$$

こゝに ψ は無次元化した流れ函数である。(2.8)式の無次元変数を導入すると、今迄の三つの独立変数 (x^*, y^*, t) から二つだけ (η, τ) のみに変化する事に注意される。

$$(2 - 2^2 \frac{\partial \psi}{\partial \eta}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial z} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^2} - 2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta} \quad (2.9)$$

境界条件は

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

$$\psi \rightarrow \psi_R, \quad z \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

$$\psi \rightarrow \psi_B, \quad z \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

こゝに ψ_R は Rayleigh の解である。

今迄この問題を扱った人は, Stewartson, Hall 等を含めて 0 と Rayleigh flow を指定し, $z \rightarrow \infty$ で定常な Blasius 解と見なす様な放物型の初期値問題として取扱っている。特に Stewartson, Hall はこの放物型問題を熱伝達と密く出て来る型の正則な初期値問題と同様に扱っているが, 式 (2.9) を見て解る様に, この放物型の式は最高次の係数が $z \geq 1$ の領域にありては, 符号を反転させる強い非線形性をもっており, これと正則な放物式の解の性質を同一に取扱う事には大きな疑問が生ずる。例えは Stewartson 等は (2.9) ~ (2.13) 式が数学的には適切な問題 (正確には Hadamard の定数による) と仮定し, 初期値の Rayleigh 解から定常解の Blasius 解まで連続な解の存在する事を仮定した。そうすると $0 \leq z < \infty$ の領域では真性の非線形性は

連続性で認められるが、代数学的特異点と認められる事になる。何等かの特異点 $c=\infty$ と $c=0$ (または $c=1$) で存在しなければならぬ事は、この問題の解を Rayleigh または Blumino の解が c 又は $1/c$ についての中展開が不可能な事から解る。 $c \rightarrow \infty$ の時、Stewartson は次の様な真性特異点をも、を解と求めた。

$$\psi(\eta, c) = \psi_B(\eta) + \frac{1}{\eta c} \frac{\partial \psi_B}{\partial \eta} g(\eta c) \exp\left\{-\frac{\partial^2 \eta^2}{9}\right\} \quad (2.14)$$

ここで g は $1/2$ 次のベッセル函数で表わされる。(2.14)式は $c \rightarrow \infty$ の極限において幾べての数値的条件を満たしている。

更に Stewartson は $c \leq 1$ の領域では前縁の乱れの影響のない事から、 $c=1$ に於いて真性特異点が存在すべきだと考えているが、この領域では今の所解析的な漸近解は求まらな

い。著者の調べた範囲では、特異型板物式の解については、殆んどと云って良い位数学的に解明はなされてい

る。従ってその正体は謎々つつまわっている状態にある訳だが、少なくとも、正則型の式と同一視するという思方は冷静に検討され直さねばならないと思われる。如何なる解の存在又は唯一性の証明に於いてもこの最高次係は全領域に於いて正である事が不可欠である。例えば Petrovsky (1955) に参照されたい。

又この Stewartson 的なる観念には次の様な矛盾が含まれてゐるのには注意を要する。よく知られてゐる様に板面型式は常に散逸性を持つので $\tau=0$ で生じた Rayleigh flow の乱れは、その増す方向に伝播して行くがこれは乱れが Rayleigh 領域から Blasius 領域に伝播する事を意味する。例えがある長さで一定の時間について流力を考えると、乱れは後方の Rayleigh 域から前方の Blasius 域の方向に、ある速度で流れるバクトルと反対の方向に伝播してゐる事を意味してゐる。これは物理的には矛盾してゐる。これは境界層式には擾乱の拡散は無視されてゐる爲、擾乱の伝播は流れるバクトル方向に沿うばかりである。

こういふ、物理的矛盾がなく流れの発展を説明し得る解は、次の様な厳密に一貫性のある漸近解の枠内で求める事が出来る事を次に示す。

§3. 漸近展開解.

境界層の式は、Navier-Stokes の式にある近似を打ち捨てる場合の漸近解の第一項である事はよく知られてゐる。定常流で物体がある長さ L と持つ場合には、 $Re = \frac{UL}{\nu}$ の Reynold 数に属し、 $Re \rightarrow \infty$ のリミットを取ると Navier-Stokes の式の第一近似として Prandtl

の境界層式が成る。所がこの問題の様に物体の長さが無限でしかも非定常流である場合に上記の定常流の解の様は一員性のある漸近解を求めるという事はまだ行われていない。第一上記のレイルズ数に対応するスミタ(又はホミタ)パラメータが何であるかを解している。

第一に考えつくのは、前縁からの距離 x を基に1を

$$R_x = Ux/\nu \gg 1.$$

を用いて漸近展開を行う事であろう。これは Stewartson, Hall 等が境界層近似を正当化する時の手段であるが、このパラメータでは漸近展開は旨く行かぬ事が解る。細く調べて解る事は

$$R_t = U^2 t / \nu \quad (3.2)$$

というパラメータで展開する事がこの問題のキーであるという事である。(3.2)式の R_t は他に時間の尺度が入る場合には唯一の無次元化時間と同様に、直ぐ解る様に前縁の乱れが流れるにより流れる距離 Ux を用いてレイルズ数である事に注意喚起され。実はこの事から、この R_t は次の様な二つの重要な二つの物理的意味をもっている。例えば、 $R_t \rightarrow \infty$ という事は、運動を要する充分長時間の経、長時間の問題という他に、この問題のレイルズ数が大きいという、事を意味す

する。大きい時間と高いレイノルズ数は一見無関係の様に見え
この事実はこの問題を扱った人々には最初な不可解な印象を與
える様であるが、実はこの事を正しく認識する事がこの大変
難かしい問題を正しく理解する事のキーだと云える。この
 $R_e \rightarrow \infty$ の極限を取ると Navier-Stokes の式の厳密な漸近解は次
の如く求まる。

$$\psi(x, y, R_e) = \psi_0(x, y) + \frac{1}{R_e^{1/2}} \psi_1(x, y) + \frac{1}{R_e} \psi_2(x, y) + \dots$$

$x, y \in \text{固定} (R_e \rightarrow \infty) \quad (3.3)$

ここで $x = \frac{x^*}{\sqrt{R_e}}$, $y = \frac{y^*}{\sqrt{R_e}}$ である。これは2章に於いて用いたその逆
数がある事に留意して頂きたい。(3.3) 式を Navier-Stokes
式に代入し、 R_e の中についてまとめると、 ψ_0 を支配する式は (2.9)
式と一致し予想通り (3.3) 式の右辺は境界層の式となる。 ψ_1 は境界層の排除層の影響により生じる項で、これは
定常の有限平板で Kuo (1954) の求めた第2次近似に相当する。
この項は定常の半無限平板の問題では零になり、最初の
修正項は (3.3) の ψ_2 の項からなる。筆者はこの問題を ψ_0 ,
 ψ_1 , ψ_2 を求め (3.3) 式による漸近解は正しい事を示す。
詳細は徳田 (1971, Part I) に示すのでここでは省略
する。

この (3.3) の展開が正しいものなどの事実から式 (2.9)

と満す境界層の解 ψ_0 は(3.3)の展開と一致したものでなければならぬ。例え、 ψ_0 は $O(1)$ のものしか含んでおらず $O(R_t^{-1/2})$ のオーダーの解を含んでおらず。実はこの事から Stewartson が $x \rightarrow 0$ の近辺で Blasius 解からの摂動解として求めた指数函数を含んだ解(2.14)は、境界層の式より高次のものであり、第一次近似の解には含まれておらず解だと示す事が出来る。

境界層の式(2.9)が成り立つのは、 $x=O(1)$ で $R_t \rightarrow \infty$ になる時であるが、 $x \rightarrow 0$ になる場合でも $x=O(R_t^{-\alpha})$ 、但し $0 < \alpha < 1/2$ の定数、の速さで 0 に近づく場合には成り立つ。すると Stewartson の固有値解(2.14)の f_1 の大きさは

$$f_1 = O\left\{\exp(-R_t^{3/2})\right\} \quad R_t \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

と成り $0 < \alpha < 1/2$ の数であるので明らかに f_1 は $R_t^{1/2}$ のオーダーより(実際には $O(R_t^{-N})$, N は何れも正の定数より)小さなものであり、第一章で述べた考察により境界層近似よりも、と小さなオーダーのものと解る。我々の(3.3)式の厳密な漸近解の枠内では、境界層の解として不適当であると結論出来る。Hall 等の境界層の数値解として求めたスーパ層解とよく調べると反らす Stewartson の固有値解(2.14)又は(3.4)を含んでおり、Hall の解はルーズな意味では確かに境界層式の解になる。

ているが、以上の理由で、Navier-Stokesの式の厳密な漸近解の枠内では、境界層の解とは云々難い。若し(3.4)が境界層の解として使えないとすれば、 $x \rightarrow 0$ の近辺ではBlasiusの解はこの非定常境界層式の厳密解にあるという重要な結論に達する。 $x \geq 1$ ではRayleighの解が成り立つ筈なので $0 < x < 1$ のある点で流線の変わる遷移点が存在する必要がある。このBlasiusの解からRayleigh解への遷移はこの問題の一番難解な点でもあり、これは徳田(1971, Part II)に詳しく述べてある。

§3. 考察

以上の様な事から結論としては次の様な新しい事実が得られた。

1. 境界層近似は $R_L \rightarrow \infty$ の極限においてのみ成り立つ。
2. $x \rightarrow 0$ の近辺では、Blasiusの解は非定常境界層式の厳密解である。 $x=0$ の近辺にBlasiusの解からRayleighの解に遷移する点が存在する。(徳田1971 Part IIを参照の事)。
3. 時間が大きい時に、最終的にはBlasius解に近づくものの近づく方は、時間の途中である。今迄のKellyの stagnation flowの大きい時間の解、又Stewartsonの(2.14)式の解が総じて $t \rightarrow \infty$ では指数函数的に近づくものとは対照的である。

例えば, この様な事実から次の様な事が解る。Stewartson は τ を時間の変数として扱い, その増加する方向に問題を解いたが, 境界層の式では $R_e \rightarrow \infty$ と τ をリミット値にとり, τ は τ を時間の変数と扱う必要は全然ない。実際にはこの逆数 x を定常流での無次元距離変数の如く扱う方が正しい。そうすると, (2.9) 式は x についての放物型の式になり, 乱れの伝播する方向は前縁から後方に向かうことになり, こうすると物理的現象と合致する。勿論これには乱れのはずれがなく逆伝わる事を前提としている。この問題の正しい解を $x=0$ で Blasius 解を指定 (初期条件として) x を増える方向に向かう x 逐次解き, $x \geq 1$ で Rayleigh flow になる物まで解を求めなければならぬ。この問題の正しい見方は従って, 次の様になる。最初の Navier-Stokes の式は時間 R_e についての放物型で $R_e = \text{一定}$ の面は特性曲面となり, $R_e = 0$ で生じた乱れは R_e の増える方向に伝播して行く。 $R_e \rightarrow \infty$ の領域の特性曲面とは境界層近似が成り立つ。するとこの面上で $x = \text{constant}$ の面が新たな特性曲面になり, この面では x の増加する方向 (前縁から下流方向に向かう) に乱れは伝播する事になる。すなわち, Navier-Stokes の式の特性曲面と, 境界層の式の特性曲面は数学的にも物理的にも全然意味が異なり, この両者は混用した事は今回の解の欠点があり, たものと思われ。

尚本研究は筆者サリ・アリ・ジ・ス・タ・に降在中に完成したもので、その中のLighthill, Batchelor 教授等の御厚意に感謝したい。

文献

Akumatsu, K & Kemimoto, G. 1966. Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University.

Dennis, S.C.R. 1971. Private Communication through Prof. Stewartson.

Hall, M.G. 1969, Proc. Roy. Soc. A 310, 401-464.

Kuo, Y.H. 1953, J. Math. and Phys. 32, 83-101.

Lam, S.H & Crocco, L. 1959, J. Aero. Sci. 26, 54-55.

Petrovsky, I.G. 1954, Lectures on Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York.

Stewartson, K. 1951, Quart. J. Mech., 4, 182-198.

Tani, I. 1971, Presented UTAM Symposium.

Tokuda, N. 1971 Part I & Part II, Submitted J. Fluid Mechanics.