

位数 p^n の f.p.f.a を持つ群について

阪大 理 松山 広

§ 0

1960 年代の初めに, 次の様な予想が立てられた。

$$| \text{Aut}(G) | \geq A, \quad C_G(A) = 1, \quad |A| = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (|A|, |G|) = 1 \\ \text{or } A = \text{cyclic} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow G = \text{solvable} \text{ or } \text{nilp}(G) \leq \sum_{i=1}^s a_i \quad \text{「}$$

Thompson による Frobenius 予想の解決以来, A に, 具体的系形を与えた, 様々な結果が得られたが, 一般的に解決には至っていない。例えば, A が素数中位数の cyclic 群としても, “ $n=1$ ”, “ $p=2$ or $n=2$ ”, 以外 n Case では, G の可解性は示されていない。しかし, G を可解群とすると, nilpotent length の方は, Hoffman [1], Shult [2], Gross [3] により, “ $p=2$ or G n Sylow p -subgroup is normal for some $p = \text{Mersenne prime} \in \pi(G)$ ” 以外の n Case では, 予想の正しいことが示されている。 $A \cong \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ のときは, Martineau [4], [5], [6] により, $A \cong \mathbb{Z}_{p^s} (r \neq s)$ のときは,

Ralston(11) = あり、それぞれ G の可解性を示している。

§ 1.

ここでは、標題とは関係のない次の事実と証明の概略を紹介する。

Prop.

1) $\pi(G) \ni p_1, p_2, p_3 = \text{distinct primes}$ such that

$$\#\{Syl_{p_i}(G)\} = p_i^2, \quad \#\{Syl_{p_i}(G)\} = \text{素数} \quad i=2,3$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1, 2, 3\} \text{ st } \langle Syl_{p_i}(G) \rangle \trianglelefteq G$$

2) $\#\{Syl_p(G)\} = \text{素数}$ for any $p \in \pi(G)$

$$\Rightarrow G = \text{solvable.}$$

証明の概略。

1) $P_1 = Syl_{p_1}(G)$ とする。 $N = N_G(P_1)$ とおく。 $N \trianglelefteq G$ となる。

$P_2 = Syl_{p_2}(G)$ とする。 仮定から、 $G = N P_2$ と書ける。

$\exists P_3 = Syl_{p_3}(G)$ st $P_3 \leq N$. 但し、 $\#\{Syl_{p_3}(G)\} \neq p_3^2$ かつ

$P_3^G \leq N$ あり、あり。 かつ $\#\{Syl_{p_3}(G)\} = p_3^2$ となる。

$\#\{Syl_{p_2}(G)\} \neq p_2^2$ for some $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\therefore N_G(P_i) \supseteq \hat{P}_i = Syl_{p_i}(G).$$

かつ、 $\hat{P}_i^G \leq N_G(P_i)$ あり、あり。

2) $\#\{\pi(G)\} \geq 3$ by Burnside. 但し、 $G = \text{minimal 非可解}$.

1) あり、 Proper normal subgroup N がある。 ($N \neq 1$)

$N \leq G/N$ が また、 仮定を満足することを示せばよい。

2.

§2.

ここでは, $A \cong \mathbb{Z}_{p^m}$ のとき, G の構造が非常に制限されるであろうといえ, 予想を立て, 強い条件つきではあるが, その予想の正しいことを示す. (A は $\mathbb{S}C$ のと同じ.)

(3) および (7) などから, 次の様なことが自然に予想される.

予想: $A = \langle \phi \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^m}$, $m=2$ or $p=\text{odd}$ ならば,

$$G = F(G) G(\phi^{p^{m-1}}) \text{ と書けるか?}$$

Prop. I. (for any prime p)

$G/F(G)$ の Sylow p -subgroup = abelian for $\forall \phi \in \Pi(G)$

$$\Rightarrow G = F(G) G(\phi^{p^{m-1}})$$

Prop. 2. G = solvable とする.

$$m=1, 2 \text{ or } p=\text{odd} \text{ ならば, } G = F(G) G(\phi^{p^{m-1}})$$

Cor. 3. (Prop. 2 と同じ仮定のもとに)

$$i) [G, \phi^{p^{m-1}}] = \text{nilpotent}$$

$$ii) G = F_k(G) G(\phi^{p^{m-k}}) \quad (k=1, \dots, m) \quad F_k(G) = \phi^k \text{ Fitting}$$

$$iii) G^{(k,p)} = \text{nilpotent}, \text{ if } m=2.$$

組 1. $\mathcal{A}_p = \text{Mar}$ } 任意 p の f.p.f.a を持つ群の交換子
群列 n 長 $\{$

証明の概略および注意

Prop. I については, "Scimemi (8)" や "Grim" による Focal 群
についての結果を用いて容易に証明できる. Prop. I の $p=2$

で成立するときは、次の予想を導く。

予想 I $A \cong \mathbb{Z}_2^n$, $\overline{G}$ の Sylow q -subgroup = abelian for any

q = Mersenne prime $\in \pi(\overline{G})$, (I.1, $\overline{G} = G/\text{Frag}$).

ただし, $G = \text{Frag}(G) \langle \Phi^{2^m} \rangle$ と書ける?

Prop. 2 は [3] を用いて, Prop. I とほぼ同様に証明できる。

Cor. 3 はすべて明白だが, ii) は, $G \langle \Phi^{2^m} \rangle$ が G の生成に

関係しなるとき, 即ち, Φ^{2^m} が G に疑似的に I.P.F.A. と

して A になる, $G = \text{nilpotent}$ になることを示している。

また iii) では, $K = n$ となる, $G = \text{Frag}(G)$ とし, $\text{nilp}(G)$

$\leq n$ を示している。iii) は, Ward [9] を改良した結果

に示している。

—終—

参考文献

[1] Hoffman Math. Z. 1964

[2] Shult Ill. Jour. Math. 1965

[3] Gross Proc. A. M. S. 1966

[4] Martineau Math. Z. 1972

[5] " Quart. J. Math. 1972

[6] " Math. Z. 1973

[7] Ralston Jour. of Alg. 1972

[8] Scimemi Jour. of Alg. 1968

[9] Ward J. Austral. Math. Soc. 1969

4.