

Jacobi 形式, Oda lifting, Maass space について

東大・教養 (学振・研究員)

菅野孝史 (Takashi Sugano)

このノートの目的は、符号 $(2, m+2)$ の直交群上の正則尖点形式の空間への 1 変数保型形式からの持ち上げ (Oda lifting) を、Jacobi 形式の言葉で言い換えることにある。

このことから、Maass space と lifting image が一致することがわかる。更に持ち上げに伴う L 関数の関係を求める。最後に、image を L 関数の言葉で特徴付けるための 1 ステップに、ふれた。

§ 1. Jacobi 形式の L 関数

Jacobi 形式とは、Siegel 保型形式の様々な部分 Fourier 係数と同じ変換公式を満たす保型形式のことである。ここでは、新谷先生により [14] で導入された用語、Hecke 環・ L 関数の定義を用いて、一番易しい場合 (本質的には 1 変数の保型形式の場合) に、 L 関数の解析接続・関数等式を調べる [一般的

な場合については Murase [09], [10] を参照されたい]。なお、この節の内容は、昨年度のシンポジウム報告集に書いた [16] §7 と殆んど重複しているが、記号の導入を兼ねて再記させてもらう。

1-1 Jacobi 形式の定義: m を非負整数、 $V_0 = \mathbb{Q}^m$,

$L_0 = \mathbb{Z}^m$ とする。 $\mathbb{Q}$ 上の代数群 H を、

$$H = H_{1,m} = \{ (u, v, z) \mid u, v \in V_0, z = {}^t z \in M_m(\mathbb{Q}) \}$$

$$(u, v, z)(u', v', z') = (u+u', v+v', z+z' + u {}^t v' + v {}^t u)$$

により定義する。これには SL_2 が、

$$g^{-1}(u, v, z)g = (u', v', z'), \quad (u', v') = (u, v)g, \quad z' = z - v {}^t u + v' {}^t u',$$

と作用している。この作用による $H \times SL_2$ の半直積を、

$$\underline{G} = \underline{G}_{1,m} = H_{1,m} \cdot SL_2 \quad \text{であらわす。これは、} Sp_{m+1} \text{ の部分群}$$

とみなせる。なお、 $\underline{G}$ の中心 Z は、 H の中心と一致し、

$$\{ (0, 0, z) \mid z = {}^t z \} \quad \text{である。}$$

$$\text{さて } \underline{G}_\infty \text{ は、 } \underline{D} = \underline{D}_{1,m} = \{ Z = (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \mid \operatorname{Im} z > 0 \} \text{ に、}$$

$$(u, v, z)g \langle (z, w) \rangle = (g \langle z \rangle, w j(g, z)^{-1} + u g \langle z \rangle + v)$$

と作用している (ここで $g \langle z \rangle, j(g, z)$ は $SL_2(\mathbb{R})$ の上半平面への通常的作用及び保型因子)。 m 次正定値半整数対称行列 S と、自然数 k に対し、

$$J_{S,k}(\underline{g}, Z) = j(g, z)^k e[-\operatorname{tr} S z + \frac{c}{j(g, z)} S[w] - \frac{2}{j(g, z)} S(u, w) - g \langle z \rangle S[u]]$$

$$(\underline{g} = (u, v, z)g, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$$

は、 $\mathbb{G}_\infty \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子を与える。 $\Gamma = \mathbb{G}(\mathbb{Z}) \times 1$ 。
 Γ に関する weight k , index S の Jacobi (cusp) forms
 の空間 $\mathcal{G}_{S,k}(\Gamma)$ を、

$$\mathcal{G}_{S,k}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} f(\gamma \langle z \rangle) = J_{S,k}(\gamma, z) f(z) \\ \text{holomorphic, cuspidal} \end{array} \forall \gamma \in \Gamma \right\}$$

と定義する。各元は、

$$f(z, w) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}, \alpha \in L_0^* = (2S)^{-1}L_0 \\ a - S[\alpha] > 0}} a_f(a, \alpha) e[az + 2S(\alpha, w)]$$

と Fourier 展開されることに注意しておく。

$\mu \in L_0^* / L_0$ に対し、

$$\theta_\mu(z, w) = \sum_{\eta \in L_0} e[zS[\eta + \mu] + 2S(\eta + \mu, w)]$$

と置く。 $\mathcal{G}_{S,k}(\Gamma)$ を、 $\{\theta_\mu(z, w) \mid \mu \in L_0^* / L_0\}$ を basis にし
 て展開することによって、weight $k - \frac{m}{2}$ のベクトル値尖点形
 式が得られる。すなわち、

$$\mathcal{G}_{S,k}(\Gamma) \cong S_{k-\frac{m}{2}}(SL_2(\mathbb{Z}); U_S),$$

ここで右辺の U_S はテータの変換公式からきまる $|L_0^* / L_0|$ 次
 のユニタリ行列。

1-2 Hecke 環: p を素数とし、 $\mathbb{G}_p = \mathbb{G}_{\mathbb{Q}_p}$, $\mathbb{K}_p = \mathbb{G}_{\mathbb{Z}_p}$,
 $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}_p}$ と置く。 $\chi = \prod_v \chi_v$ を $\mathbb{Q}_A / \mathbb{Q}$ の指標で $\chi_\infty(\alpha) = e[\alpha]$
 となるものとする。新谷先生により $\mathbb{G}_p$ の Hecke 環が、

$$\mathcal{H}_{S,p} = \left\{ \phi: \mathbb{G}_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{be } \mathbb{K}_p\text{-invariant} \\ \phi((0,0,\beta)g) = \chi_p(h\beta) \phi(g) \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}_p \setminus \text{supp } \phi = \text{compact} \end{array} \right\}$$

と定義されてゐる (積は、 $Z_p \setminus \mathbb{G}_p$ 上の convolution)。

以下、" $L_{0,p} = L_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ が S に関し maximal integral lattice for $\forall p$ " と仮定する。

$$L'_{0,p} = \{ x \in L_{0,p}^* \mid S[x] \in p^{-1}\mathbb{Z}_p \}$$

は、 $L_{0,p}$ を含み、 $L'_{0,p}/L_{0,p}$ は、有限体 $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ 上の vector space となるから、その次元を ∂_p とあらわす (殆んどの p では、 $\partial_p = 0$ である)。 ν_p は S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index,

$n_{0,p} = m - 2\nu_p$ とし、 $\mathcal{U}_{S,p}$ の特別な元 $\phi_{0,p}, \phi_{1,p}$ を

$$\begin{cases} \phi_{0,p} : (0, y, 0) (y \in L'_{0,p}) \text{ の値} = p^{-\partial_p}, \text{ supp} = \mathbb{Z}_p \subseteq_p \{(0, y, 0) \mid y \in L'_{0,p}\} \subseteq_p \\ \phi_{1,p} : \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^{-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ の値} = 1, \text{ supp} = \mathbb{Z}_p \subseteq_p \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^{-1} & 0 \end{pmatrix} \subseteq_p \end{cases}$$

と定義する。容易に、

$$\begin{aligned} \phi_{0,p} * \phi_{1,p} &= \phi_{1,p} * \phi_{0,p} = \phi_{1,p}, \\ \phi_{0,p} &= 1 \text{ if } \partial_p = 0, \quad \phi_{0,p}^2 = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial_p = 1 \\ (1-p^{-1})\phi_{0,p} + p^{-1} & \text{if } \partial_p = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

この2元で生成される $\mathcal{U}_{S,p}$ の subalgebra を、 $\mathcal{U}'_{S,p}$ とおく。

$\lambda_p \in \text{Hom}(\mathcal{U}'_{S,p}, \mathbb{C})$ の L 関数を、

$$\begin{aligned} L_p(\lambda_p; s) &= \left\{ 1 - (\lambda_p(\phi_{1,p}) p^{-(1+\frac{m}{2})} - p^{-n_{0,p}/2 + \partial_p} + p^{-(1+n_{0,p}/2)} p^{-s} + \lambda_p(\phi_{0,p})^{-1} p^{-2s} \right\}^{-1} \\ &\times \begin{cases} (1 - \chi_S(p) p^{-s})^{-1} & \text{if } m = \text{偶} \\ 1 & \text{if } m = \text{奇} \end{cases} \\ &\times \begin{cases} 1 & (n_{0,p}, \partial_p) = (2, 1) \text{ or } \partial_p = 0 \\ 1 + p^{s/2 - s} & (n_{0,p}, \partial_p) = (1, 1) \\ 1 - p^{s/2 - s} & = (3, 1) \\ (1 + p^{s/2 - s})(1 - p^{s/2 - s}) & = (3, 2) \\ (1 + p^{1-s})(1 + p^{-s}) & = (2, 2) \\ (1 - p^{1-s})(1 - p^{-s}) & = (4, 2) \end{cases} \end{aligned}$$

と定義する。ここで χ_S は、 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m/2} \det S}) / \mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標。

1-3 L 関数 : $\mathcal{O}_{S,k}(\Gamma)$ の元を、 $\mathbb{G}_A$ 上の関数とみる。

convolution で、 $\bigotimes_{p<\infty} \chi'_{S,p}$ が (Petersson 内積に関し) 正

規可換に作用している。今、同時固有関数 $f \in \mathcal{O}_{S,k}(\Gamma)$:

$$f * \phi = \lambda_f(\phi) f \quad \forall \phi \in \bigotimes_p \chi'_{S,p} \quad \text{に対し,}$$

$$\zeta(f; \lambda) = \prod_p L_p(\lambda_f; \lambda) \times \Gamma(1+k-\frac{m+2}{2}) \times \begin{cases} 2^{-\lambda} \pi^{-\frac{3}{2}\lambda} (\det 2S)^{\lambda} & m=\text{偶} \\ (2\pi)^{-\lambda} (2^{-1} \det 2S)^{\lambda} & m=\text{奇} \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} \Gamma(\frac{\lambda+1}{2}) & \text{if } m \equiv 0 \pmod{4} \\ \Gamma(\frac{\lambda}{2}) & \text{if } m \equiv 2 \pmod{4} \\ 1 & \text{if } m \equiv \text{奇} \end{cases} \quad \text{と置く。}$$

この L 関数に対し、次の定理が成立する。

Theorem 1 $k > \frac{m+1}{2}$ とする。 $\zeta(f; \lambda)$ は全 λ 平面に解析接続され 関数等式

$$\zeta(f; \lambda) = \begin{cases} -1 & \text{if } m \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod{8} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \zeta(f; 1-\lambda)$$

をみたす。更に、 $m \not\equiv 6 \pmod{8}$ ならば $\zeta(f; \lambda)$ は entire であり、 $m \equiv 6 \pmod{8}$ のときは $\lambda=0, 1$ で possible simple pole を持つのみである。

§ 2. Oda lifting と Maass space

この節では、Oda [11] で構成されている elliptic modular から直交群上の保型形式への lifting を、前節の Jacobi 形式

の言葉を使って言い換える。こうするメリットのひとつは、original versionでは一般には成立しない、*lifting* の単射性が成立することにある。また、Fourier係数をみると、2次 Siegel の場合の Maass space と同様、部分 Fourier 係数からの持ち上げとなっており、こゝがわかる。

2-1 Oda lifting : L_0, V_0, S 等は前節の通りとし、

$$L_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_0 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_0 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -2S & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ L_1 \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \subset V = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \\ V_1 \\ \mathbb{Q} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_1 & \\ & & \end{pmatrix} \quad \text{とおく。}$$

G を $\mathbb{Q}$ の直交群 $O(Q)$, $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^{m+2} \mid Q_1[\operatorname{Im} z] > 0\}$ とする。 $\mathcal{D}$ は2個の連結成分を持つが、 $z_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ を含む方を $\mathcal{D}^+$ と書く。 G_∞ は $\mathcal{D}$ に、

$g \cdot \widehat{z} = \widetilde{g(z)} \cdot J(g, z) \quad \left(\widehat{z} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}Q_1[z] \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, J(g, z) \in \mathbb{C}^\times \right)$
と作用し、 $J(g, z)$ は $G_\infty \times \mathcal{D}$ 上の値を持つ正則保型因子。

$$\Gamma = G \cap GL(m+4, \mathbb{Z}) \supset \Gamma^* = \{ \gamma \in \Gamma \mid (\gamma-1)L^* \subset L \}$$

と置き、 $S_k(\Gamma), S_k(\Gamma^*)$ でそれぞれ Γ, Γ^* に関する weight k の正則尖点形式の空間をあらわす。各 $F \in S_k(\Gamma^*)$ は、 $F(z) = \sum_{\nu \in L_1^*} a_F(\nu) e[Q_1(\nu, z)]$ と各連結成分上 Fourier 展開される。

上半平面の点 $z = x + iy$ に対し

$$Q_z = xQ + iyR, \quad R = \begin{pmatrix} 1_2 & & \\ & 2S & \\ & & 1_2 \end{pmatrix} \quad \text{と置き、}$$

V_∞ 上の急減少関数 f_z を.

$$f_z(v) = Q(\tilde{z}_0, v)^k \in [Q_z[\mathcal{D}]] \quad \text{で定める.}$$

最後に, *lifting* を定義する τ - ρ 関数を.

$$\theta((z, w), g) = \sum_{\mu \in L^*/L} \theta(z, g; \mu) \theta_{\pi(\mu)}(z, w) \quad \text{とおく.}$$

$$= \tau \quad (z, w) \in \mathcal{D}_{1,m}, \quad g \in G_\infty \quad \text{で,}$$

$$\theta(z, g; \mu) = y^{\frac{m+2}{2}} \sum_{\tilde{z} \in L} f_z(g^{-1}(\tilde{z} + \mu)) \quad ,$$

π は V の元 v の V_0 -成分を対応させる mapping.

Oda [11] の主結果は, 次のように言い直される.

Theorem (Oda) $k > 2m+4$ とする.

(i) $f \in \mathcal{G}_{S,k}(\Gamma)$ のとき,

$$\begin{aligned} (f(g)) \approx \int_{\Gamma \setminus \mathcal{D}} \overline{\theta(z, g)} f(z) y^{k-2} dx dy du dv \\ (z = (x+iy, u(x+iy)+v)) \\ \in S_k(\Gamma^*) \end{aligned}$$

逆に, $F \in S_k(\Gamma^*)$ のとき,

$$\rho F(z) \approx \int_{\Gamma^* \setminus G_\infty} \theta(z, g) F(g) dg \in \mathcal{G}_{S,k}(\Gamma).$$

(ii) $\rho F(z, w)$ は (up to non-zero constant τ)

$$\sum_{\substack{\tilde{z} \in L^*/\Gamma^* \\ Q[\tilde{z}] > 0}} \theta_{\pi(\tilde{z})}(z) e[\frac{1}{2}Q[\tilde{z}]z] \int_{\Gamma_{\tilde{z}}^* \setminus X_{\tilde{z}}} F(x) Q(\tilde{x}, \tilde{z})^{k-(m+2)} \omega(x)$$

と Fourier 展開される. ここで, $X_{\tilde{z}} = G_{\tilde{z}}/G_{\tilde{z}} \cap U_\infty \subset \mathcal{D}$,

ω は $\mathcal{D}$ 上の holomorphic $(m+2)$ form の $X_{\tilde{z}}$ への引き戻し, $U_\infty = \{g \in G_\infty \mid g\langle \tilde{z}_0 \rangle = \tilde{z}_0\}$.

(iii) $\mathcal{L}f(z)$ ($z \in \mathcal{D}^+$) は (up to non-zero constant τ)

$$\sum_{\substack{\nu = \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} \in L_1^* \\ \sqrt{-1}\nu \in \mathcal{D}^+}} \left\{ \sum_{\substack{r > 0 \\ r^{-1}\nu \in L_1^*}} r^{k-1} a_f(mn/r^2, \alpha r^{-1}) \right\} \in [Q, (\nu, z)]$$

と Fourier 展開される.

Remark • (i) の定義より, ρ と $\mathcal{L}$ は, Petersson 内積に関し, 互いに他の adjoint になっている.

• (iii) より特に, (original version とは異なり) $\mathcal{L}$ は injective となっている.

• もうひとつの maximal parabolic subgroup による部分 Fourier 係数は, 記号の違いを除き, $\Theta_{S,k}(\Gamma)$ の元である. 直接 (iii) が $S_k(\Gamma^*)$ に属することを示すこともできる. (cf. [08], [16])

2-2 Maass space : 2次 Siegel の場合にならい,

$S_k(\Gamma^*)$ の Maass space $S_k(\Gamma^*)^{(M)}$ を,

$$S_k(\Gamma^*)^{(M)} = \left\{ F \in S_k(\Gamma^*) \mid a_F \left(\begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} \right) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ r^2 m, r^2 n \in \mathbb{Z}, \alpha r^{-1} \in L_0^*}} r^{k-1} a_F \left(\begin{pmatrix} mn/r^2 \\ \alpha r^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

で定義する (original case [08], $SU(2,2)$ case [06] [03] [17]).

また, 形式的にはこれより大きい空間 $S_k(\Gamma^*)^{(F)}$ を,

$$S_k(\Gamma^*)^{(F)} = \left\{ F \in S_k(\Gamma^*) \mid a_F(l \cdot \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix}) = a_F(l \cdot \begin{pmatrix} mn \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}) \quad \forall \begin{pmatrix} m \\ \alpha \\ n \end{pmatrix} : \text{primitive} \right\}$$

と定義. $S_k(\Gamma)^{(M)} = S_k(\Gamma^*)^{(M)} \cap S_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma)^{(F)} = S_k(\Gamma^*)^{(F)} \cap S_k(\Gamma)$.

Proposition $k > 2m+4$ とする.

$$\begin{array}{ccc} S_k(\Gamma^*)^{(M)} & \xleftarrow[\cong]{\quad} & \mathcal{G}_{S,k}(\Gamma) \\ \cup & & \cup \\ S_k(\Gamma)^{(M)} & \cong & \mathcal{G}_{S,k}^+(\Gamma) = \{f \in \mathcal{G}_{S,k}(\Gamma) \mid f * \phi_{0,p} = f \quad \forall p\} \end{array}$$

§ 3. 直交群の L 関数

この節では、 $S_k(\Gamma)$ の L 関数を定義するとともに、Eisenstein 級数を用いた積分表示を与える。特に $S_k(\Gamma)^{(F)}$ の元に対し χ は、L 関数の関数等式を求める。

3-1 local L 関数の定義 : $G_p = G_{\mathbb{Q}_p} \supset U_p = G_{\mathbb{Z}_p}$
 G_p と U_p の組で決まる Hecke 環 $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(G_p, U_p)$ について Satake 同型 ([13]) が成立する。

$$\Phi : \mathcal{H}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1^{\pm}, \dots, X_{\nu_p+2}^{\pm}]^W$$

(ここで、 ν_p は §1 で述べた E の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index, W は Weyl 群.)

$\lambda_p \in \text{Hom}(\mathcal{H}_p, \mathbb{C})$ に対し、その local L 関数を定義する。

$$L_p(\lambda_p; \lambda)_{\lambda} = \lambda_p \left(\Phi^{-1} \left(\prod_{j=1}^{\nu_p+2} (1 - X_j p^{-\lambda}) (1 - X_j^{-1} p^{-\lambda}) \right) \right)^{-1}$$

$$\times \begin{cases} 1 & \text{if } (m_{0,p}, d_p) = (0,0), (1,0) \\ (1-p^{-2\lambda})^{-1} & = (2,0) \\ (1-p^{-\lambda})^{-1} & = (2,1) \\ (1-p^{-\lambda})^{-1} (1+p^{1-\lambda}) & = (2,2) \\ (1-p^{-\lambda})^{-1} (1-p^{-1-\lambda})^{-1} & = (4,2) \\ (1+p^{-\frac{1}{2}-\lambda}) & = (1,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-\lambda})^{-1} & = (3,1) \\ (1-p^{-\frac{1}{2}-\lambda})^{-1} (1+p^{\frac{1}{2}-\lambda}) & = (3,2) \end{cases}$$

ここで、 $\eta_{0,p}, \partial_p$ は §1 で定義したもの。

Remark $\partial_p \neq 0$ なる有限個の p については、[15] で与えた定義と少し異なる場合がある (λ_p による違い)。

3-2 local Whittaker 関数 : $\xi \in V_{1,p}$ に対し、

$$\mathcal{W}_\xi \equiv \left\{ W: G_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} W(\pi(x)(1, h)g) = \chi_p(Q, (\xi, x)) W(g) \\ \forall x \in V_{1,p}, \forall g \in G_p, \forall u \in U_p, \forall h \in H(\xi)_p \cap U_p \end{array} \right\}$$

とおく。但し、 $\pi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -txQ_1 & -\frac{1}{2}Q_1[x] \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{Q}_p^\times, h \in O(Q)_p$ に対し、 $(t, h) = \begin{pmatrix} t & h \\ & t^{-1} \end{pmatrix}$ とおいた。また、 $H(\xi)$ は ξ を固定する $O(Q)_1$ の元全体。

$\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_{1,p}^*$, $Q_1[\xi] \neq 0$ とする。任意の $x \in V_{1,p}$ に対し、 $(p^{-1}, 1)\pi(x)\xi \in L_{1,p}^*$ するとき、 ξ を (p^{-1}) reduced といいこことにする。以下これを仮定し、§2 で定義した $S_k(\Gamma)^{(M)}$, $S_k(\Gamma)^{(F)}$ の local version にあたるものを導入しておく。

$$\mathcal{W}_\xi^{(F)} \equiv \left\{ W \in \mathcal{W}_\xi \mid W(1, h)g = W(g) \quad \forall h \in H(\xi) \right\}$$

$$\mathcal{W}_\xi^{(M)} \equiv \left\{ W \in \mathcal{W}_\xi^{(F)} \mid \begin{array}{l} W((p^{n+l}, M_n)) = W((p^{n+l}, M_{n+1})) \\ = p^{-l} W((p^n, M_n)) \end{array} \quad \forall n, l \geq 0 \right\}$$

$$\text{但し } M_n = \begin{pmatrix} p^{-n} & & \\ & 1 & \\ & & p^n \end{pmatrix}$$

これらは全て χ_p -stable である。

Theorem 2 $W \in \mathcal{W}_\xi$, $\phi' * W * \phi = \lambda'(\phi') \lambda_p(\phi) W$

for $\forall \phi \in \chi_p, \forall \phi' \in \chi(H(\xi)_p, H(\xi)_p \cap U_p)$ とする。このとき、

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} W((t, 1)) |t|_p^{1 - \frac{m+2}{2}} d^\times t$$

$$= L_p(\lambda_p; 1) \cdot L_p(\lambda'_p; 1 + \frac{1}{2})^{-1} \times \begin{cases} 1 & m = \text{奇} \\ (1 - p^{-2\lambda})^{-1} & m = \text{偶} \end{cases} \cdot W(1).$$

3-3 $O(1, m+2)$ 上の Eisenstein 級数 : $\xi = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \in L_1^*$,

$\mathbb{Q}_1[\xi] > 0$ とする. ξ は全 z の p - τ reduced としよう.

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} S & S\alpha \\ {}^t(S\alpha) & a \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}' = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & -2\underline{\Sigma} \end{pmatrix} \quad \text{とおく.}$$

G' を $\mathcal{Q}'$ の直交群、 P' を G' の上三角 parabolic subgroup とする. $H(\xi)$ を $O(\underline{\Sigma})$ と同一視しておく.

$$f: H(\xi)_{\mathbb{Q}} \backslash H(\xi)_A / H(\xi)_{\infty} \prod_p (H(\xi)_p \cap U_p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

が、 $\otimes_p \chi(H(\xi)_p, H(\xi)_p \cap U_p)$ の同時固有関数: $f * \phi' = \lambda'(\phi') f$ としよう. Eisenstein 級数を.

$$E(g, \lambda; f) \equiv \sum_{\gamma \in P'_{\mathbb{Q}} \backslash G'_{\mathbb{Q}}} f(\beta(\gamma g)) |\alpha(\gamma g)|_A^{1 + \frac{m+1}{2}} \quad \text{と定義.}$$

$$\text{ここで、} G'_A \ni g \text{ を } g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & * & * \\ 0 & \beta(g) & * \\ 0 & 0 & \alpha(g)^{-1} \end{pmatrix} \prod_v \mu_v \quad \text{と}$$

岩沢分解した.

Eisenstein 級数の一般論より (cf. [02], [04], [05], [07])

$E(g, \lambda; f)$ は全 λ -平面に解析接続され、関数等式

$$E(g, \lambda; f) = \frac{\xi(f; \lambda)}{\xi(f; \lambda+1)} \mu(\lambda) \times \begin{cases} 1 & m+1 = \text{偶} \\ \frac{\xi(2\lambda)}{\xi(2\lambda+1)} & m+1 = \text{奇} \end{cases}$$

$$\times E(g, -\lambda; f) \quad \text{をみたす.}$$

ここで, $\mu(\lambda)$ は, $\mu(\lambda)\mu(-\lambda) = 1$ をみたす (具体的にわかる) λ の有理式であり,

$$\zeta(f; \lambda) = \prod_p L_p(\lambda'_p; \lambda) \times \begin{cases} (2\pi)^{-n\lambda} (2^{-1} \det 2S)^{\lambda/2} & m=\text{奇} \\ (2\pi)^{-n\lambda} (\det 2S)^{\lambda/2} & m=\text{偶} \end{cases}$$

$$n = \left[\frac{m+1}{2} \right] \times \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma(\lambda - n + \frac{1}{2} + 2j) & m=\text{奇} \\ \prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda - n + 1 + 2j) \prod_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda + 2j) & m=\text{偶}, n=\text{偶} \\ \prod_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\lambda - n + 1 + 2j) \prod_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(\lambda + 2j + 1) & m=\text{偶}, n=\text{奇} \end{cases}$$

3-4 $S_k(\Gamma)$ の L 関数 : $G_A = G_{\mathbb{Q}} G_{\infty} \prod_p U_p^*$

($U_p^* = \{u \in U_p \mid (u-1)L^* \subset L\}$) が成立するから, $S_k(\Gamma)$, $S_k(\Gamma^*)$ とともに G_A 上の関数とみなしてよい. 今, $F \in S_k(\Gamma)$ が, $\otimes_p \mathcal{H}_p$ の同時固有関数としよう. F の L 関数を次のように定義する. $\nu = \left[\frac{m}{2} \right]$,

$$\zeta(F; \lambda) \stackrel{\sim}{=} (2\pi)^{-(\nu+2)\lambda} \begin{cases} (2^{-1} \det 2S)^{\lambda/2} & m=\text{奇} \\ (\det 2S)^{\lambda/2} & m=\text{偶} \end{cases}$$

$$\times \Gamma(4+k-\frac{m}{2}-1) \Gamma(\lambda + \frac{m}{2}) \begin{cases} \prod_{j=0}^{\nu} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2} - \nu + 2j) & m=\text{奇} \\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\lambda - \nu + 2j) \prod_{j=1}^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\lambda + 2j - 1) & m=\text{偶}, \nu=\text{偶} \\ \prod_{j=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\lambda - \nu + 2j) \prod_{j=0}^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(\lambda + 2j) & m=\text{偶}, \nu=\text{奇} \end{cases}$$

$$\times \prod_p L_p(\lambda'_p; \lambda)$$

各 $\xi \in V_{1, \mathbb{Q}}$ に対し,

$$F_{\xi}(g) = \int_{V_{1, \mathbb{Q}} \backslash V_{1, A}} F(n(x)g) \chi(-Q_1(\xi, x)) dx$$

とおく. 今 ξ が全ての p で reduced だとし, f を前項のよう

に与る。さらに、

$$W_{F, \xi, f}(g) = \int_{H(\mathbb{Q}) \backslash H(\mathbb{R})_A} F_3((1, h)g) f(h) dh \quad \text{とおく.}$$

Theorem 3 以上の状況で、次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \int_{G'_A \backslash G'_A} E^*(g', \lambda - \frac{1}{2}; f) F(g'g_0) dg' \\ &= c \cdot \lambda^*(\lambda)^{-1} \xi(F; \lambda) W_{F, \xi, f}(g_0) \end{aligned}$$

ここで、 c は non-zero constant, $g_0 \in G_\infty^\circ$ は ξ に依存する元, $\lambda^*(\lambda)$ は、具体的にわかる λ の q 項式, そして

$$E^*(g', \lambda; f) = \xi(f; \lambda+1) \begin{cases} \xi(2\lambda+1) & m=\text{偶} \\ 1 & m=\text{奇} \end{cases} E(g', \lambda; f).$$

Remark E^* の解析的性質より、 $W_{F, \xi, f}(g_0) \neq 0$ なる条件下で、 $\xi(F; \lambda)$ の解析接続が言えたことになる。しかし、関数等式については、 $\xi(f; \lambda)$ のそれが障害となり、一般には難しい。

Corollary $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ が Hecke eigen とする。このとき、 $\xi(F; \lambda)$ は全 λ -平面に解析接続され、関数等式

$$\xi(F; \lambda) = \begin{cases} -1 & \text{if } m \equiv 5, 7 \pmod{8} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \xi(F; 1-\lambda)$$

をみたす。possible pole は、 $\lambda = -\frac{m}{2} + j$ ($0 \leq j \leq m+1$) のみであり、そのうち最大の $-\frac{m}{2} + 1$ では高々 simple である。

§ 4. Maass space の L 関数

この節では、§ 1 でみた Jacobi 形式が Hecke eigen のとき、Oda lifting で持ち上げたものが再び Hecke eigen となること及びその関係を求める。応用として Maass space について、前節 Corollary より詳しい情報が得られる。最後に、 $S_k(\Gamma)^{(F)}$ に於ける Maass space の特徴付けを行う。

Theorem 4 $k > 2m+4$ とする ($\nu = [\frac{m}{2}]$)。

$f \in \mathcal{O}_{S,k}^+(\Gamma)$ が $\otimes_p \mathcal{H}_{S,p}'$ -eigen ならば、 lf は $\otimes_p \mathcal{H}_p$ -eigen であり、次式が成立する。

$$\zeta(lf; \lambda) = c \cdot \zeta(f; \lambda) \times \begin{cases} \prod_{j=0}^{\nu} \zeta(\lambda + \frac{1}{2} + j) \zeta(\lambda - \frac{1}{2} - j) \prod_{j=0}^{2\nu} (\lambda - \frac{1}{2} - \nu + j) & m = \text{奇} \\ \prod_{j=0}^{2\nu} \zeta(\lambda - \nu + j) \prod_{j=0}^{2\nu-1} (\lambda - \nu + j) & m = \text{偶} \end{cases}$$

(cf. $Sp(2, \mathbb{R}) \dots [01]$, $SU(2, 2) \dots [03]$)

Corollary 上と同じ状況に於て、 $\zeta(lf; \lambda)$ は、

$m \neq 6$ (8) ならば高々 simple pole を持つのみであり、 $m \equiv 6$ (8) の場合は、 $\lambda = 0, 1$ で高々 2 位である他では simple pole のみである。

さて、 $E^*(g', \lambda; 1)$ の $\lambda = \frac{m+1}{2}$ での留数が定数となること及び、 L の adjoint map ρ の表示 (Theorem Oda (ii)) を使えば、Oda [12] と平行な議論によって次の定理が証明される。

Theorem 5 $k > 2m+4$, $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ とする.

$F \in S_k(\Gamma)^{(M)} \iff \zeta(F; \lambda)$ が $\lambda = \frac{m+2}{2}$ での simple pole を持つ.

Remark $Sp(2, \mathbb{R}) \sim SO(2, 3)$ (cf. [12]), $SU(2, 2) \sim SO(2, 4)$ (cf. [16]) の場合の例から考えると、上の定理は $F \in S_k(\Gamma)^{(F)}$ の仮定をなくしても成立することが期待される。

References

- [01] A. N. Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture , Inv. Math. 53 (1979), 267-280.
- [02] J. Arthur : Eisenstein series and the trace formula , Proc. Symp. Pure Math. vol.33 (1979), part 1, 253-274.
- [03] V. Gricenko : Maass space for $SU(2, 2)$, Hecke algebra and zeta function, in Russian, (preprint).
- [04] Harish-chandra : Automorphic forms on semi-simple Lie groups , Lecture Note in Math. 62, Springer, 1968.
- [05] V. L. Kalinin : Eisenstein series on the symplectic group, Math. USSR-Sb. 32 (1977), 449-476.
- [06] H. Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two , Invent. Math. 69 (1982), 217-227.
- [07] R. P. Langlands : On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Note in Math. 544, Springer, 1976.

- [08] H. Maass : Über eine Spizialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III, Invent. Math. 52 (1979), 95-104, 53 (1979), 249-253, 53 (1979), 255-265.
- [09] A. Murase : Jacobi forms に付随するL函数について, 数理解析研究所講究録 583.
- [10] A. Murase : L-functions attached to Jacobi forms of degree n (preprint).
- [11] T. Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977), 97-144.
- [12] T. Oda : On the poles of Andrianov L-functions , Math. Ann. 256 (1981), 323-340.
- [13] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields , Inst.Hautes Études Sci. Publ. Math. 18 (1963).
- [14] Shintani : unpublished notes.
- [15] T. Sugano : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on $SO(2, q)$, Advanced Studies in Pure Math. vol. 7, Kinokuniya, 1985, 333-362.
- [16] T. Sugano: 符号 $(2, 2)$ のユニタリ群のL関数について, 数理解析研究所講究録 583.
- [17] T. Sugano : On the L-functions associated with hermitian modular forms of genus 2 (preprint).