

von Neumann algebra 上の homomorphism について

東北大 理学部 武元英夫

§ 1. 序

von Neumann algebra 上の homomorphism の連続性について、uniform topology によるものと、 σ -weak topology によるものか考えられる。uniform topology に対する Continuity の幾つかの結果が、Rickart, Johnson, Stein 等によって示されている。ここでは、von Neumann algebra から von Neumann algebra 上への homomorphism の σ -weak topology に対する Continuity について、考えていくことにする。これらの研究に対して、多くの人の結果が知られているが、ここでは、竹崎氏、岡安氏の結果を用いて得られる性質を述べる事に議論を展開していく。

§ 2 ではある種の von Neumann algebra 上から他の von Neumann algebra 上への homomorphism が常に σ -weakly continuous であることを示していく。

§3 では、§2 の結果を homomorphism が W^* -representation になるかどうかという議論に応用して示される性質について述べている。特に、functional の積分表現について、考えている。

以上の項目でもって話を展開していく。homomorphism については、ことわらない限りは not $*$ -preserving と仮定して議論を展開していく。

§2. von Neumann algebra 上の homomorphisms の連続性
この section では次の結果を示すことに目的を置く。

定理。 M は separable predual M_* をもつ properly infinite von Neumann algebra である。その時、 M から a von Neumann algebra N への任意の homomorphism は σ -weakly continuous となる。

これを示すのに幾つかの性質を必要としている。そこで、それらの性質を述べてから定理の証明に入る。まず、補題1を示すが、これは竹崎氏 (Theorem 7 in [16]) によって示されている性質ではあるが、ここで、その simple proof を与えている為、証明をも述べておく。

補題 1. M は α -finite, properly infinite von Neumann algebra, N は α -finite von Neumann algebra であるとする。その時、 M から N の中への $*$ -homomorphism π は α -weakly continuous となる。

証明。 Theorem 5 in [16] によって、 π は次の様に、 π の α -weakly continuous part π_1 と π の singular part π_2 によって、 $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ によって分解される。

今、 $\pi_2 \neq 0$ として議論を展開して矛盾を起せば良い。そこで、 π が singular であると仮定して矛盾を起せば良いということが分るので、 π が singular であると仮定する。

π が singular であるから、 N 上の normal faithful positive linear functional ψ が存在して、 $\pi(\psi) = g$ が M 上の singular positive linear functional となる。
[17] における singular positive linear functional の characterization と M が α -finite であることから次の事柄が分る。

$\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$: orthogonal projections,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n = 1, \quad g(e_n) = 0 \quad \text{for all } n.$$

すると、 $0 = g(e_n) = \pi(\psi)(e_n) = \psi(\pi(e_n))$

and ψ is faithful であるから、

$$\pi(e_n) = 0 \quad \text{for all } n.$$

が成立する。

M が properly infinite より、 M において、 $p_n \sim 1$ なる orthogonal projections の family $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。ここで、 $v_n^* v_n = p_n$ 、 $v_n v_n^* = 1$ なる partial isometry v_n に対し、orthogonal projections の family $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次の様に定義する：

$$q_n = v_n^* \left(\sum_{k=1}^n e_k \right) v_n.$$

$\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ を positive integers の increasing sequence とした時、次の性質が得られる：

$$q_{n_{i+1}} = v_{n_{i+1}}^* \left(\sum_{k=1}^{n_{i+1}} e_k \right) v_{n_{i+1}} \geq v_{n_{i+1}}^* \left(\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} e_k \right) v_{n_{i+1}} \sim \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} e_k$$

and

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} \geq \sum_{k=n_1+1}^{\infty} e_k,$$

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i}\right) \geq \pi\left(\sum_{k=n_1+1}^{\infty} e_k\right) = \pi\left(1 - \sum_{k=1}^{n_1} e_k\right) = \pi(1) \neq 0$$

故に、
$$\pi\left(\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i}\right) \neq 0.$$

一方、
$$\pi(q_n) = \pi(v_n)^* \left(\sum_{k=1}^n \pi(e_k) \right) \pi(v_n) = 0 \quad \text{である。}$$

今、 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ を rational numbers 全体の countable set とする。その時、任意の real number s に対し：

$\exists \{r_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$: infinite sequence

$$0 < |r_{n_i} - s| < 1/i \quad \text{for all } i$$

$$n_j < n_i \quad \text{for } j < i$$

そこで、 s に対して上の性質を満足する sequence $\{r_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ の index set $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ を対応させて考えると、 $s \neq s'$ の時、

$\{n_i\} \cap \{n'_i\}$ はせいぜい有限個となることは、簡単に分る。

今、 $s \leftrightarrow \{n_i\}$ に $q_s = \sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i}$ と定義すると、今までの議論によつて、もし $s \neq s'$ の時は $\pi(q_s q_{s'}) = \pi(q_s) \pi(q_{s'}) = 0$ として、 $\pi(q_s) \neq 0$ であることが分る。

従つて、 R は real numbers 全体の集合とすると、

$\{\pi(q_s) : s \in R\}$ は互いに orthogonal な projections の set となる。しかし、 N^m の ω -finite であるから、この事は矛盾を生じさせていることになる。この矛盾は、 π が singular であると考へたことから起つたものである。従つて、 π は singular part を持たない。即ち、 π は ω -weakly continuous となる。

次に、後で必要の為に岡安氏[8]の結果を証明なしで述べておこう。

補題2。 A は identity 1 をもつ C^* -algebra, M を

von Neumann algebra とする。その時 A 上から M の上への任意の isomorphism π は次の様な分解をもつ。

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_2$$

ここで、 π_1 は M の inner automorphism で π_2 は A 上から M 上への $*$ -isomorphism である。

補題 2 を考えることにより、次の性質をもつ。

補題 3. M と N を von Neumann algebras とする。その時、 M 上から N 上への任意の $*$ -homomorphism が α -weakly continuous であるならば、 M 上から N 上への任意の homomorphism は α -weakly continuous となる。

証明。onto mapping 即ち、 $\pi(M) = N$ であることと、Rickart's theorem により、 π は uniformly continuous である。従って、 $M/\pi^{-1}(0)$ は C^* -algebra となる。

今、 $\delta \in M$ から $M/\pi^{-1}(0)$ 上への Canonical mapping ι ($\iota \in M/\pi^{-1}(0)$ から N 上への π により induce される isomorphism とする。すると、補題 2 により、 π は次の分解 $\pi = \tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2$ (ここで $\tilde{\pi}_1$ は N の inner automorphism, $\tilde{\pi}_2$ は $M/\pi^{-1}(0)$ から N 上への $*$ -isomorphism である) に分解される。

すると、 $\pi = \widehat{\pi} \circ \delta = \widehat{\pi}_1 \circ (\widehat{\pi}_2 \circ \delta)$ である。

そこで、 $\widehat{\pi}_1$ は N の inner automorphism であるから、 α -weakly continuous となる。更に、 $\widehat{\pi}_2 \circ \delta$ が M から N 上への $*$ -homomorphism であることと、仮定によって、 $\widehat{\pi}_2 \circ \delta$ は α -weakly continuous となる。従って、 π は α -weakly continuous となる。

系。 M は α -finite, properly infinite von Neumann algebra N は α -finite von Neumann algebra である。その時、 M から N 上への任意の homomorphism は α -weakly continuous となる。

以上の結果から定理の証明を得よう。

定理の証明。定理を証明するにあたって、補題1と補題23によって、 π は $*$ -homomorphism であると仮定して定理を証明すれば良い。

M の predual M_* が separable であることから $\overline{M} \leq \mathbb{C}$ である。次に、 N が α -finite であることを証明しよう。もし N が α -finite でないとなれば、uncountable な orthogonal projections の family $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が N の中に存在する。そこ

で $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の subset K に対して一つの projection が対応することとを考えると、 $\bar{N}_p \neq \mathbb{C}$ となることが分る。しかし、今、 $\bar{M} \supseteq \bar{N}$ であるから、これは矛盾を起す。

従って、 N は α -finite であることが分る。

従って、 M から N 上への任意の $\ast$ -homomorphism が α -weakly continuous になることは補題1によって分る。更に、補題3によって、 M から N 上への任意の homomorphism が α -weakly continuous になることが分る。以上をもって定理の証明を終る。

定理の応用については §3 において述べることにする。

§3. von Neumann algebra の表現。

この Section では §2 の結果を表現が W^* -representation になるかという今までの事柄に適用して得られる性質を述べる。最初は次の形で、functional の積分表現について議論を進める。

定理。 M は Hilbert space H 上に act して Π は type 1 von Neumann algebra である。 Σ は M の center で、 X は Σ の spectrum を表わす。 φ は M 上の reducible normal state である。その時、 φ は次の性質 (1) - (3) を満たす積分表現をもつ。

$$\varphi(a) = \int_X \varphi_z(a) d\nu(z) \quad \text{for all } a \in M.$$

$\therefore \exists \nu, \nu$ は $\varphi|_Z$ に対応する X 上の spectral measure であり、

$z \in \text{supp}(\nu)$ に対して、 φ_z は M 上の state である。

(1) 写像 $z \rightarrow \varphi_z$ は weakly continuous on $\text{supp}(\nu)$ である。

(2) Z の元 z と M の元 a に対して、 $\varphi_z(za) = z^*(z)\varphi_z(a)$ が成立する。

(3) φ_z は factor state である。

上の定理を証明する為に幾つかの性質を述べて行こう。

H 上に act している von Neumann algebra M に対して $(M^*)^+ \ni \varphi$ が $\psi \in (M^*)^+$ を include しているとは $\exists \lambda > 0; \varphi - \lambda\psi \in (M^*)^+$ になることである。(Notation: $\psi \ll \varphi$) この時、

$$\begin{aligned} \psi \ll \varphi &\iff \forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M \ni \varphi(a_n^* a_n) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \\ &\implies \psi(a_n^* a_n) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

であることは簡単に分る。

$\varphi \in (M^*)^+$ が reducible であるとは

$$\forall \psi \in (M^*)^+; \psi \ll \varphi \text{ に対して } \exists a_0 \in M^+; \psi(a) = \varphi(a a_0) \text{ for all } a \in M.$$

上の定義に対して normal reducible positive linear functional の extended notation を与えよう。

補題4. $\varphi \in (M_*)^+$ に対して、 $e = \text{supp}(\varphi)$ とおいた時、 φ が reducible であることと、 φ が eMe 上の faithful normal trace τ であることは同値である。

この証明は簡単である為に省略する。(cf. [15])

M における abelian projection e に対して、 Z_{eMe} から eMe 上への $*$ -isomorphism を Φ とした時、 Φ によって定義される M から Z_{eMe} 上への linear mapping τ_e 即ち、 $\tau_e(a) = \Phi^*(eae)$ に対して state $\varphi_z(a) = \tau_e(a) \wedge (z)$ は pure state である。この証明は、 $\{\sum_{i=1}^n a_i z_i : a_i \in M, z_i \in Z \text{ and } z_i \wedge (z) = 0\}$ の uniform closure によって得られる ideal $[z]$ を使うことによって証明されるがここでは省略する。(cf. [15])

補題5. A は identity 1 をもつ C^* -algebra と、 $\varphi, \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ は A 上の positive linear functional 次の性質を満たしている。

(1) $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i$, (2) $\exists \{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A_+$: orthogonal, $\varphi_i(1-e_i) = 0$.

この時、 $(\pi_\varphi, \iota|_\varphi)$, $\{(\pi_i, \iota|_i)\}_{i=1}^{\infty}$ と夫々、 $\varphi, \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ によって induce される A の canonical representation とすると、次の (1)-(4) の性質を満たす H_φ の closed subspaces の family $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する。

(1) if $i \neq j$, K_i と K_j は互いに直交する。

(2) $K_i \cap \pi_\varphi(A)' = \{0\}$, (3) $\iota|_\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i$ (4) $\pi_\varphi|_{K_i} \cong \pi_i$

証明。(1)_g と (1)_i は夫々 H_g と H_i における inner products とし z_g と z_i は夫々 $\pi_g(A)$ と $\pi_i(A)$ の cyclic vector とする。そこで、全ての i に対して、 $\mathcal{G}_i \leq \mathcal{G}$ であるから

$$\exists t_i \in \pi_g(A)' : 0 \leq t_i \leq 1, \quad \mathcal{G}_i(b^*a) = (\pi_g(a)t_i z_g | \pi_g(b)t_i z_g)_g$$

が A の全ての元 a, b に対して成立する。

I_g と I_i は夫々に $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}_i$ の left kernel とし、 $\mathcal{U}_g$ と $\mathcal{U}_i$ は夫々に A から A/I_g と A/I_i への canonical mapping とする。この時、

$$(\mathcal{U}_i(a) | \mathcal{U}_i(b))_i = \mathcal{G}_i(b^*a) = (t_i \pi_g(a) z_g | t_i \pi_g(b) z_g)_g \text{ for all } a, b \in A.$$

$\Pi_i \in \{\pi_i(A) z_i\}$ から $\{\pi_g(A) z_g\}$ の中への写像で、 $\Pi_i(\pi_i(a) z_i) = \pi_g(a) t_i z_g$ によって定義する。この時、 Π_i は H_i から $K_i = [\pi_g(A) t_i z_g] = \overline{t_i(I_g)}$ 上への unitary operator に一意に拡張されることは明らかである。更に、 A の任意の元 a, b に対して次が成る。

$$\Pi_i(\pi_i(a) \mathcal{U}_i(b)) = \Pi_i(\pi_i(ab) z_i) = \pi_g(ab) t_i z_g$$

$$\pi_g(a)(\Pi_i \mathcal{U}_i(b)) = \pi_g(a) \Pi_i(\pi_i(b) z_i) = \pi_g(a) \pi_g(b) t_i z_g = \pi_g(ab) t_i z_g$$

従って、 $\pi_g|_{K_i} \stackrel{\sim}{=} \pi_i$ である。

$\{K_i\}_{i=1}^n$ が互いに直交することと $H_g = \sum_{i=1}^n K_i$ になることは次の事から成る。

$$|\mathcal{G}_k((1-e_i)b^*a e_i)|^2 \leq \mathcal{G}_k(a^*b(1-e_i)b^*a) \mathcal{G}_k(e_i)$$

$$\leq \mathcal{G}_k(a^*b(1-e_i)b^*a) \mathcal{G}_k(1-e_k) = 0 \quad \text{if } i \neq k$$

and

$$|\mathcal{G}_i((1-e_i)b^*a e_i)|^2 \leq \mathcal{G}_i(1-e_i) \mathcal{G}_i(b^*a e_i a^*b) = 0$$

従って、任意の i に対して、 $H_g = \overline{\mathcal{U}_g(Ae_i)} \oplus \overline{\mathcal{U}_g(A(1-e_i))}$

and $K_i = \text{supp}(t_i) \subset \overline{\eta_g(Ae_i)}$

更に、

$$\begin{aligned} (\eta_g(a) | \eta_g(b))_g &= g(b^*a) = \sum_{i=1}^n g_i(b^*a) = \sum_{i=1}^n (t_i \pi_g(a) \zeta_g | t_i \pi_g(b) \zeta_g)_g \\ &= (\eta_g(a) | (\sum_{i=1}^n t_i^2) \eta_g(b) \zeta_g)_g \end{aligned}$$

従って、 $\sum_{i=1}^n t_i^2 = 1$ が成立して、 $H_g = \sum_{i=1}^n \oplus K_i$ が成立する。

補題 6. A は identity 1 をもつ C^* -algebra とする。今、 $g \in (A^*)^+$ $\{g_i\}_{i=1}^n \subset (A^*)^+$ が次の性質をもっていると仮定する。

(i) 全ての i に対して g_i は pure である。

(ii) $g = \sum_{i=1}^n g_i$

(iii) $\exists \{e_i\}_{i=1}^n \subset A_p$: equivalent orthogonal projections

$$g_i(1-e_i) = 0 \text{ for all } i, \quad g_i(u_i^* a u_i) = g_i(a) \text{ for all } a \in A, i=1, \dots, n$$

$$\text{where } u_i^* u_i = e_i, \quad u_i u_i^* = e_i.$$

この時、 g は factor state である。

この証明は $\{g_i\}_{i=1}^n$ による表現 $\{(\pi_i, H_i)\}$ が互いに unitary equivalent になるという事実をもちいて分る。そこで、ここでは証明は省略する。

以上の事柄から定理の証明を進めよう。

定理の証明。 e は $\mathcal{G}$ の support を表わす。その時、補題4から $\mathcal{G}$ は eMe 上の faithful normal trace である。従って eMe は type I 且つ finite な von Neumann algebra である。従って、 $\mathcal{Z}_e$ の projections の family $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して、 e_n は n -homogeneous projection であり、 $\sum_{n=1}^{\infty} e_n = e$ となる。(今後、 e_n を e_n で表わす。)

最初、 $e=1$ と仮定する。そして、 Y_1 は Σ の spectrum を表わす。更に、 X_n は e_n に対応する Y_1 における clopen set である。

(ここで、 Y_1 を X と異なっているのは、後で $Y_1 \in \Sigma_e$ の spectrum として使用する為である。)

等式 $\sum_{n=1}^{\infty} e_n = 1$ から、 $Y_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = N'$ は Y_1 における non-dense set である。そして、 M_{e_n} が n -homogeneous であるから、equivalent abelian orthogonal projections の family $\{p_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ が存在して、 $\sum_{i=1}^n p_i^{(n)} = e_n$ が成立する。そこで、 $M_{e_n} = \mathcal{O}_n \otimes B(H_n)$ 、ここで $\mathcal{O}_n$ は abelian von Neumann algebra と書き、 M_{e_n} において $p_i^{(n)} M p_i^{(n)}$ を Φ_n とおく。更に、 $u_i^{(n)*} u_i^{(n)} = p_i^{(n)}$ 、 $u_i^{(n)} u_i^{(n)*} = p_i^{(n)}$ と $u_i^{(n)}$ を定義すると、 M_{e_n} の元 a に対して、 $a = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i^{(n)} u_i^{(n)*}$ for $a_{ij} = \Phi_n^{-1}(p_i^{(n)} u_i^{(n)*} a u_j^{(n)} p_j^{(n)}) \in \mathcal{O}_n$ が成立する。特に、 $p_i^{(n)} a p_i^{(n)} = a_{ii} p_i^{(n)}$ が成立する。

そこで、 M の finiteness から、 Y_1 上の spectral measure μ に対して、

$$g(a) = g(a^4) = \int_{Y_1} a^4(\gamma) d\mu(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} a^4(\gamma) d\mu(\gamma) \text{ for } a \in M.$$

しかも, $\text{supp}(\mu) = Y_1$ となる。更に, $a \in M_{e_n}$ に対して,

$$\varphi(a) = \varphi(a^4) = \int_{X_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_n^{-1}(P_i^{(n)} u_i^{(n)*} a u_i^{(n)} P_i^{(n)}) \right)^{\wedge}(\gamma) d\mu(\gamma)$$

議論を eMe から M へ戻そう。 $e = \text{supp}(\varphi)$ より, $\varphi(a) = \varphi(eae)$ が成立する。従って,

$$\varphi(a) = \varphi(eae) = \int_{Y_1} (eae)^{\wedge}(\gamma) d\mu(\gamma) \quad \text{for all } a \in M.$$

Y は $z(e)$ に対応する X における clopen set である。 Y_1 は Z_e の spectrum である。その時, 写像 $Z_{Z(e)} \ni a \rightarrow a e \in Z_e$ によって $Z_{Z(e)}$ と Z_e は $*$ -isomorphic になる。この $*$ -isomorphism を π とする。その時, π は $(Z_e)^*$ から $(Z_{Z(e)})^*$ への order preserving linear isomorphism であり, 且つ Y_1 から Y への homeomorphism f を induce する。更に, Y から Y_1 への homeomorphism となる f^{-1} を η とする。そして, $\varphi_3(a) = (eae)^{\wedge}(\eta(z))$ によって M 上の state φ_3 を定義する。その時, $\varphi_3(a)$ は z の函数として考えると, $\pi((eae)^{\wedge}(\cdot))$ になっていくことは明らかである。しかも, $Z \ni z, Y \ni \gamma$ に対して $\varphi_3(za) = (ezae)^{\wedge}(\eta(z)) = z^{\wedge}(z) \varphi_3(a)$ が成立する。更に, φ_3 に対して, 写像 $z \rightarrow \varphi_3$ が weakly continuous であることは明らかである。今, $\pi(\mu) = \nu \in C(Y)^*$ を定義する。その時,

$$\varphi(a) = \int_{Y_1} (eae)^{\wedge}(\gamma) d\mu(\gamma) = \int_Y \varphi_3(a) d\nu(z) \quad \text{for } a \in M.$$

更に、 $\text{supp}(\nu) = Y$ で ν は spectral measure on Y である。

N' が Y_1 において、non-dense set より、 $f(N') = N$ は Y において non-dense set である。そこで、 $Y - N \ni \lambda$ に対して、 $\eta(\lambda) \in X_n$ なる n が存在する。その n を fix して議論を進めて行こう。

$\mathcal{G}_{i3}(a) = \frac{1}{n} \Phi_n^{-1}(P_i^{(n)} u_i^{(n)*} (e_n a e_n) u_i^{(n)} P_i^{(n)})^{\wedge}(\eta(\lambda))$ によって M 上の positive linear functional $\mathcal{G}_{i3}$ を定義する。その時、page 10 から $\mathcal{G}_{i3}$ は pure である。しかも $\mathcal{G}_{i3}(1 - e_n) = 0$ for $i=1, \dots, n$ から、

$$\mathcal{G}_{i3}(a) = \mathcal{G}_{i3}(e_n a e_n) \quad \text{for all } a \in M \quad (i=1, \dots, n).$$

$u_i^{(n)}$ の定義から、等式 $u_i^{(n)} e_n = e_n u_i^{(n)}$ が簡単に示される。従って

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i3}(u_i^{(n)*} a u_i^{(n)}) &= \frac{1}{n} \Phi_n^{-1}(P_i^{(n)} e_n (u_i^{(n)*} a u_i^{(n)}) e_n P_i^{(n)})^{\wedge}(\eta(\lambda)) \\ &= \frac{1}{n} \Phi_n^{-1}(P_i^{(n)} u_i^{(n)*} (e_n a e_n) u_i^{(n)} P_i^{(n)})^{\wedge}(\eta(\lambda)) \\ &= \mathcal{G}_{i3}(a) \quad \text{for all } a \in M, i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

更に、各 i に対して、 $P_i^{(n)}$, $\mathcal{G}_{i3}$ の定義から、 $\mathcal{G}_{i3}(1 - P_i^{(n)}) = 0$ が成立する。しかも、 $\{P_i^{(n)}\}$ は orthogonal 且つ equivalent な projections の family である。従って、補題 6 から、 $\mathcal{G}$ は factor state である。

以上で定理の証明を終えたが、§2 の定理を使うことによって、 $\mathcal{G}_3$ はかならずしも W^* -representation を induce しない事が分る。そこで、これからそれを示すと共に他の色々な応用によって得られる性質を述べて行こう。

注意1. §2で定理して来た ideal $[3]$ に対して得られる C^* -algebra $M(3) = M/[3]$ は Glimm [3] による概念である。そこで $M(3)$ が W^* -algebra になるかどうかということが考えられる分だが、これから、これはかならずしも W^* -algebra にならない事を示していこう。 $\pi_3 \in M$ から $M(3)$ への canonical mapping とした時、 $X \ni 3$ に対して $\pi_3^{-1}(0) \cap Z = \{z \in Z : z^3(3) = 0\}$ であることから、 π_3 が α -weakly continuous になるためには $\{3\}$ が clopen set になることが必要十分条件であることが分る。そこで、 M として特に、 separable predual M_* をもちし p も、 center Z が non-atomic なるものにとり、 π_3 が α -weakly continuous となる $3 \in X$ が存在する。

上の性質を満足する von Neumann algebra M の例を挙げる。 H を countably infinite dimensional Hilbert space とする。として、 $M = L^\infty(0, 1) \otimes B(H)$ にとり、 π_3 による α -weakly continuous なる $3 \in X$ が存在する。とすると上の事柄の性質を満足している事が分る。

同時に、 §3 の定理における $\mathcal{G}_3$ がかならずしも W^* -representation をもたない事も分る。 L p も、その例として M は上と同じものであり、 $\mathcal{G}$ として次の様に構成すれば良い。

e を finite dimensional projection on H とし、 $\mathcal{G}' \subseteq N = L^\infty(0, 1) \otimes eB(H)e$ 上の faithful normal trace とする。そして、 $\mathcal{G}(a) = \mathcal{G}'(eae)$ for each $a \in M$ によって得られる $\mathcal{G}$

が求めるものとなることが分る。

注意2. §2 の定理の応用として次の事も分る。 H を countably infinite dimensional Hilbert space とし、 $C(H)$ を H 上の completely continuous operators 全体から作られる $B(H)$ における ideal とする。その時、 $B(H)/C(H)$ が W^* -algebra にならない事が分る。

REFERENCES

- [1] J.W. Calkin, Two sided ideals and congruences in the rings of bounded operators in Hilbert space, Ann. of Math., 42(1941), 839-873.
- [2] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [3] J. Glimm, The Stone-Weierstrass Theorem for C^* -algebras, Ann. of Math., 72(1960), 216-244.
- [4] H. Halpern, An integral representation of normal functional on a von Neumann algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 125(1966), 32-46.
- [5] B.E. Johnson, Continuity of homomorphisms of algebras of operators, Journal London Math. Soc., 42(1967), 537-541.
- [6] R. Kadison, Irreducible operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 43(1957), 273-276.
- [7] L. Kaplansky, Representations of separable algebras, Duke Math. J., 19(1952), 219-222.
- [8] T. Okayasu, A structure theorem of automorphism of von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 20(1968), 199-206.
- [9] C. Rickart, General theory of Banach algebras, Van Nostrand, New York, 1960.
- [10] S. Sakai, The theory of W^* -algebras, Lecture Note, Yale University, 1962.
- [11] S. Sakai, A Radon-Nikodym theorem in W^* -algebra, Bull. Amer Math Soc., 73(1965), 149-151.

- [12] S. Sakai, On the central decomposition for positive functionals on C^* -algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965), 406-419.
- [13] J.D. Stein, Homomorphisms of semi-simple algebras, Pac. J. of Math., 26(1968), 589-594.
- [14] H. Takemoto, On the homomorphism of von Neumann algebra, Tôhoku Math. J., 21(1969), ~~237-248~~. 152-157.
- [15] H. Takemoto, On the integral representation of some functional on a von Neumann algebra, Tôhoku Math. J. 21(1969) 237-248.
- [16] M. Takesaki, On the conjugate space of operator algebra, Tôhoku Math. J., 10(1958), 194-203.
- [17] M. Takesaki, Singularity of positive linear functionals, Proc. Japan Acad., 36(1959), 365-366.
- [18] J. Tomiyama, On the projection of norm one in W^* -algebras, Proc. Japan Acad. 33(1957), 608-612.
- [19] J. Tomiyama, On the projection of norm one in W^* -algebras, III, Tôhoku Math. J., 11(1959), 125-129.
- [20] F.B. Wright, A reduction for algebras of finite type, Ann. of Math., 60(1954), 560-570.