

BUZANO の不等式とその拡張について
(BUZANO INEQUALITY AND ITS EXTENSION)

大阪教育大学 富永 雅 (Masaru Tominaga)
Osaka Kyoiku University

1. 序

1963 年、Wilf [20] は、複素数に対して、次の様な逆算術幾何平均不等式を示した：複素数 $t_1, \dots, t_n$ に対して

$$(1.1) \quad |\arg t_i| \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, \dots, n)$$

を仮定する。このとき

$$(1.2) \quad |t_1 \cdot t_2 \cdots t_n|^{\frac{1}{n}} \leq (\sec \phi) \frac{1}{n} |t_1 + t_2 + \cdots + t_n|.$$

が得られる。事実、仮定 (1.1) より

$$(1.3) \quad \cos \phi \cdot (|t_1| + |t_2| + \cdots + |t_n|) \leq |t_1 + t_2 + \cdots + t_n|$$

なので、算術幾何平均不等式より、不等式 (1.2) が導かれる。

その後、Diaz と Metcalf [2] は、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で内積が定義されたヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ におけるベクトルの場合について、その結果を拡張した：

Diaz-Metcalf 不等式. z を $\mathcal{H}$ 上の単位ベクトルとする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を不等式

$$0 \leq r \leq \frac{\operatorname{Re} \langle x_i, z \rangle}{\|x_i\|} \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r をもつよう与える。このとき、次の不等式

$$r \sum_i \|x_i\| \leq \left\| \sum_i x_i \right\|.$$

が得られる。

[9, Theorem 9] において、Diaz-Metcalf 不等式 は、Selberg 不等式 と関係づけられ、次のように拡張された ([12]):

定理 A. $z_1, \dots, z_m$ を $\mathcal{H}$ 上のベクトルとする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle x_i, z_j \rangle}{\|x_i\|} \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r_j を持つよう与える。このとき、 $y \in \mathcal{H}$ が $j = 1, \dots, m$ に対して $\langle y, z_j \rangle = 0$ を満たせば

$$|\langle x_1 + \cdots + x_n, y \rangle|^2 + \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \|x_i\| \right)^2 \|y\|^2 \leq \left\| \sum_i x_i \right\|^2 \|y\|^2$$

が成り立つ。但し、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle z_h, z_j \rangle|$ とする。

次に、Buzano 不等式を紹介する。ここで、 $\mathcal{B}(y_1, y_2)$ ($y_1, y_2 \in \mathcal{H}$) を次のように定める：

$$\mathcal{B}(y_1, y_2) := \frac{1}{2}(\|y_1\| \|y_2\| + |\langle y_1, y_2 \rangle|).$$

任意の $x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ に対して不等式

$$|\langle x, y_1 \rangle \langle x, y_2 \rangle| \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2$$

が成り立つ。もし、 $y_1 = y_2$ ならば、Schwarz 不等式になる。

拙稿 [8] において、Selberg と Buzano との同時拡張不等式を導いた：

定理 B. $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ ($k = 1, 2$) が 0 でないベクトル $\{z_j; j = 1, 2, \dots, m\} \subset \mathcal{H}$ に対して $\langle y_k, z_j \rangle = 0$ を満たすとき、不等式

$$(1.4) \quad |\langle x, y_1 \rangle \langle x, y_2 \rangle| + \mathcal{B}(y_1, y_2) \sum_j \frac{|\langle x, z_j \rangle|^2}{\sum_h |\langle z_h, z_j \rangle|} \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \|x\|^2$$

がすべての $x \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

本稿では、Diaz-Metcalf 不等式と Buzano 不等式に関係する 定理 A, B における不等式の同時拡張を導く。応用として、拡張した Heinz-Kato-Furuta 不等式の改良を行う。更に、Furuta 不等式 と chaotic order を用いることにより導かれる不等式についても触れる。

2. Diaz-Metcalf 不等式と Buzano 不等式の同時拡張

まず、Diaz-Metcalf 不等式と Buzano 不等式の同時拡張を与える：

定理 2.1. $z_1, \dots, z_m$ を $\mathcal{H}$ 上の 0 でないベクトルとする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle x_i, z_j \rangle}{\|x_i\|} \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \dots, m$ に対して $\langle y_k, z_j \rangle = 0$ を満たせば

$$(2.1) \quad \left| \left\langle \sum_i x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i x_i, y_2 \right\rangle \right| + \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \|x_i\| \right)^2 \mathcal{B}(y_1, y_2) \\ \leq \mathcal{B}(y_1, y_2) \left\| \sum_i x_i \right\|^2$$

が成り立つ。但し、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle z_h, z_j \rangle|$ とする。

証明. 次の不等式により、(2.1) が得られる：

$$\mathcal{B}(y_1, y_2) \left\{ \left\| \sum_i x_i \right\|^2 - \sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \left(\sum_i \|x_i\| \right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathcal{B}(y_1, y_2) \left(\left\| \sum_i x_i \right\|^2 - \sum_j \frac{(\operatorname{Re} \langle \sum_i x_i, z_j \rangle)^2}{c_j} \right) \\
&\geq \mathcal{B}(y_1, y_2) \left(\left\| \sum_i x_i \right\|^2 - \sum_j \frac{|\langle \sum_i x_i, z_j \rangle|^2}{c_j} \right) \\
&\geq \left| \left\langle \sum_i x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i x_i, y_2 \right\rangle \right|.
\end{aligned}$$

ここで、3 番目の不等式は、定理 B により成り立つ。

□

次に、不等式 (2.1) の拡張を導く：

系 2.2. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。 $z_1, \dots, z_m$ を $\mathcal{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、 α, β を $\alpha + \beta \geq 1 \geq \alpha$ を満たす非負数とする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle x_i, z_j \rangle}{\|x_i\|} \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \dots, m$ に対して $\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha} y_k, z_j \rangle = 0$ (resp. $\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} z_j, y_k \rangle = 0$) を満たせば

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad &\left| \left\langle \sum_i T|T|^{\alpha+\beta-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T|T|^{\alpha+\beta-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\
&+ \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \| |T|^\alpha x_i \|^2 \right) \\
&\leq \mathcal{B}(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \left\| \sum_i |T|^\alpha x_i \right\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ。但し、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。

証明. 定理 2.1 において x_i, z_j, y_k をそれぞれ $|T|^\alpha x_i, |T|^{1-\alpha} U^* z_j, U^* |T^*|^\beta y_k$ (resp. $U|T|^\alpha x_i, U|T|^\alpha z_j, |T^*|^\beta y_k$) に置き換えることにより得られる。□

3. Extensions of Heinz-Kato-Furuta 不等式

[15] において、古田は、Heinz-Kato 不等式を次のように拡張した：

Heinz-Kato-Furuta 不等式. A と B を $\mathcal{H}$ 上の正作用素とする。 T が $T^*T \leq A^2$ と $TT^* \leq B^2$ を満たすとき、

$$|\langle T|T|^{\alpha+\beta-1} x, y \rangle| \leq \|A^\alpha x\| \|B^\beta y\|$$

が任意の $x, y \in \mathcal{H}$ と $\alpha + \beta \geq 1$ を満たす $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対して成り立つ。尚、 A と B が逆作用素ならば、条件 $\alpha + \beta \geq 1$ を必要としない。

この不等式は、種々の一般化が考察されている ([9], [10], [11])。本章では、系 2.2 を適用し、Heinz-Kato-Furuta 不等式を拡張する。そのために、次の補題を提示する ([8]):

補題 C. ある $B \geq 0$ が $TT^* \leq B^2$ を満たしているならば、 $\beta \in [0, 1]$ に対して

$$B(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \leq \|B^\beta y_1\| \|B^\beta y_2\|$$

が任意の $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ に対して成り立つ。

ここで、系 2.2 と 補題 C から次の不等式を導く：

系 3.1. $T = U|T|$ を $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とし、 $z_1, \dots, z_m$ を $\mathcal{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、 $\alpha, \beta \in [0, 1]$ は $\alpha + \beta \geq 1 \geq \alpha$ を満たすとする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle T x_i, z_j \rangle}{\| |T|^\alpha x_i \|} \quad \left(\text{resp. } 0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle |T|^{2\alpha} x_i, z_j \rangle}{\| |T|^\alpha x_i \|} \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、ある $A, B \geq 0$ に対して $T^*T \leq A^2$ と $TT^* \leq B^2$ かつ、 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \dots, m$ に対して $\langle |T^*|^{\beta+1-\alpha} y_k, z_j \rangle = 0$ (resp. $\langle T |T|^{\alpha+\beta-1} z_j, y_k \rangle = 0$) を満たせば

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i T |T|^{\alpha+\beta-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T |T|^{\alpha+\beta-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\ (3.1) \quad & + B(|T^*|^\beta y_1, |T^*|^\beta y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \| |T|^\alpha x_i \|^2 \right) \\ & \leq \|B^\beta y_1\| \|B^\beta y_2\| \left\| \sum_i A^\alpha x_i \right\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。但し、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。

次に、更なる拡張のために Furuta 不等式 [13] を引用する：

The Furuta 不等式.

$A \geq B \geq 0$ ならば、任意の $r \geq 0$ に対して

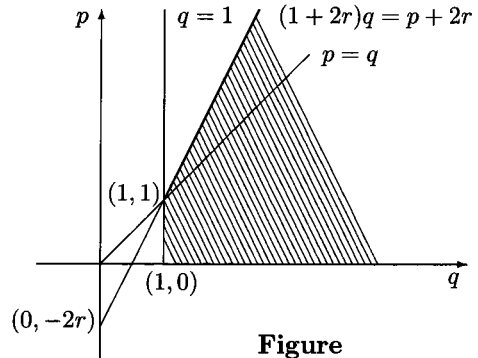
$$(i) \quad (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq (B^r B^p B^r)^{\frac{1}{q}}$$

と

$$(ii) \quad (A^r A^p A^r)^{\frac{1}{q}} \geq (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}}$$

が次の不等式 $(1+2r)q \geq p+2r$

を満たす $p \geq 0$ と $q \geq 1$ に対して成り立つ。



Figure

尚、[17] と [3] にもその証明が記載されており、特に、[14] ではその証明が 1 頁でなされている。図中において、印づけられた範囲が、最良であることは棚橋により示されている [18]。また、Heinz-Kato-Furuta 不等式は、[16] において Furuta 不等式を用いることで拡張された。

ここで、Furuta 不等式により、次に示す通り 系 2.2 の拡張を与える：

定理 3.2. A を $\mathcal{H}$ 上の正作用素とし、 $T = U|T|$ は、 $T^*T \leq A^2$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。 $z_1, \dots, z_m$ を $\mathcal{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、 $\alpha, \beta \geq 0$ は、任意の $r, s \geq 0$ に対して $(1+r)\alpha + (1+s)\beta \geq 1 \geq (1+r)\alpha$ を満たすとする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle Tx_i, z_j \rangle}{\| |T|^{(1+r)\alpha} x_i \|} \quad \left(\text{resp. } 0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle |T|^{2(1+r)\alpha} x_i, z_j \rangle}{\| |T|^{(1+r)\alpha} x_i \|} \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \dots, m$ に対して $\langle |T^*|^{(1+s)\beta+1-(1+r)\alpha} y_k, z_j \rangle = 0$ (resp. $\langle T|T|^{(1+r)\alpha+(1+s)\beta-1} z_j, y_k \rangle = 0$) を満たせば次が成り立つ：

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i T|T|^{(1+r)\alpha+(1+s)\beta-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T|T|^{(1+r)\alpha+(1+s)\beta-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\ & + \mathcal{B}(|T^*|^{(1+s)\beta} y_1, |T^*|^{(1+s)\beta} y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \| |T|^{(1+r)\alpha} x_i \|^2 \right) \\ & \leq \mathcal{B}(|T^*|^{(1+s)\beta} y_1, |T^*|^{(1+s)\beta} y_2) \left\langle (|T|^r A^{2p} |T|^r)^{\frac{(1+r)\alpha}{p+r}} \sum_i x_i, \sum_i x_i \right\rangle. \end{aligned}$$

但し、 $p \geq 1$ 、かつ、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-(1+r)\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2(1+r)\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。

証明. 系 2.2 において α と β をそれぞれ $\alpha_1 = (1+r)\alpha$ と $\beta_1 = (1+s)\beta$ とに置き換えることにより次が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T|T|^{\alpha_1+\beta_1-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\ & + \mathcal{B}(|T^*|^{\beta_1} y_1, |T^*|^{\beta_1} y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \| |T|^{\alpha_1} x_i \|^2 \right) \\ & \leq \mathcal{B}(|T^*|^{\beta_1} y_1, |T^*|^{\beta_1} y_2) \left\langle |T|^{2\alpha_1} \sum_i x_i, \sum_i x_i \right\rangle. \end{aligned}$$

但し、 $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-\alpha_1)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2\alpha_1} z_h, z_j \rangle|$) とする。次に、Furuta 不等式において A, B, r, q をそれぞれ $A^2, |T|^2, \frac{r}{2}, \frac{p+r}{(1+r)\alpha}$ に置き換える。このとき

$$|T|^{2\alpha_1} = |T|^{2(1+r)\alpha} \leq (|T|^r A^{2p} |T|^r)^{\frac{(1+r)\alpha}{p+r}}$$

が得られ、上記 2 式より不等式 (3.2) が導かれる。 $\square$

ここで上記定理において、 T が正、あるいは、可逆であれば、 $(1+r)\alpha + (1+s)\beta \geq 1$ は、必要でない。

$\log A \geq \log B$ により定義される順序は chaotic order と呼ばれ、 $A \gg B$ と表される [4]。対数関数の作用素単調性からこの順序は $A \geq B$ よりも弱い。Furuta 型作用素不等式の観点から chaotic order の特徴づけが得られる ([5], [6], [7])。そこで、chaotic order により系 2.2 に関わる不等式を与える。このために、次の chaotic order の特徴づけを紹介する ([4], [5], [6], [7], [19]) :

定理 D. 作用素 $A, B > 0$ が $A \gg B$ である必要十分条件は

$$(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq (B^r B^p B^r)^{\frac{1}{q}}$$

が $2rq \geq p + 2r$ を満たす $q \geq 1, p, r \geq 0$ に対して成り立つことである。

ここで、定理 D を適用することにより、系 2.2 の chaotic 版が導かれる :

定理 3.3. A を $\mathcal{H}$ 上の正作用素とし、 $T = U|T|$ は、 $T^*T \ll A^2$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。 $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha \in [0, 1]$ とする。 $z_1, \dots, z_m$ を $\mathcal{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、 $\alpha, \beta \in [0, 1]$ は、任意の $r, s \geq 0$ に対して $r\alpha + s\beta \geq 1 \geq r\alpha$ を満たすとする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle T x_i, z_j \rangle}{\| |T|^{r\alpha} x_i \|} \quad \left(\text{resp. } 0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle |T|^{2r\alpha} x_i, z_j \rangle}{\| |T|^{r\alpha} x_i \|} \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \dots, m$ に対して $\langle |T^*|^{s\beta+1-r\alpha} y_k, z_j \rangle = 0$ (resp. $\langle T |T|^{r\alpha+s\beta-1} z_j, y_k \rangle = 0$) を満たせば次が成り立つ :

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i T |T|^{r\alpha+s\beta-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T |T|^{r\alpha+s\beta-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\ (3.3) \quad & + B(|T^*|^{s\beta} y_1, |T^*|^{s\beta} y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \| |T|^{r\alpha} x_i \|^2 \right) \\ & \leq B(|T^*|^{s\beta} y_1, |T^*|^{s\beta} y_2) \left\langle (|T|^r A^{2p} |T|^r)^{\frac{r\alpha}{p+r}} \sum_i x_i, \sum_i x_i \right\rangle. \end{aligned}$$

但し、 $p \geq 0$ 、かつ、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-r\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2r\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。

証明. 系 2.2 において α と β をそれぞれ $r\alpha$ と $s\beta$ に置き換えることにより次が成り立つ :

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i T |T|^{r\alpha+s\beta-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T |T|^{r\alpha+s\beta-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\ & + B(|T^*|^{s\beta} y_1, |T^*|^{s\beta} y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \| |T|^{r\alpha} x_i \|^2 \right) \\ & \leq B(|T^*|^{s\beta} y_1, |T^*|^{s\beta} y_2) \left\langle |T|^{2r\alpha} \sum_i x_i, \sum_i x_i \right\rangle. \end{aligned}$$

但し、 $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-r\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2r\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。次に、定理 D において A, B, r, q をそれぞれ $A^2, |T|^2, \frac{r}{2}, \frac{p+r}{r\alpha}$ に置き換える。このとき、

$$|T|^{2r\alpha} \leq (|T|^r A^{2p} |T|^r)^{\frac{r\alpha}{p+r}}.$$

が得られ、上記 2 式より不等式 (3.3) が導かれる。 $\square$

次に、Furuta 不等式と 定理 D を補間する Furuta 型作用素不等式を適用することにより 定理 3.2 と 定理 3.3 を補間する次の結論が導かれる：

定理 3.4. A を $\mathcal{H}$ 上の正作用素とし、 $T = U|T|$ は、ある $\delta \in (0, 1]$ に対して $|T|^{2\delta} \leq A^{2\delta}$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の作用素 T の極分解とする。 $z_i \notin \ker(T^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $\alpha \in [0, 1]$ とする。 $z_1, \dots, z_m$ を $\mathcal{H}$ 上の 0 でないベクトルとし、 $\alpha, \beta \in [0, 1]$ は、任意の $r, s \geq 0$ に対して $(\delta + r)\alpha + (\delta + s)\beta \geq 1 \geq (\delta + r)\alpha$ を満たすとする。 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ を、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して不等式

$$0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle T x_i, z_j \rangle}{\||T|^{(\delta+r)\alpha} x_i\|} \quad \left(\text{resp. } 0 \leq r_j \leq \frac{\operatorname{Re} \langle |T|^{2(\delta+r)\alpha} x_i, z_j \rangle}{\||T|^{(\delta+r)\alpha} x_i\|} \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が定数 r_j をもつよう与える。このとき、 $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ が $k = 1, 2$ と $j = 1, \dots, m$ に対して $\langle |T^*|^{(\delta+s)\beta+1-(\delta+r)\alpha} y_k, z_j \rangle = 0$ (resp. $\langle T |T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1} z_j, y_k \rangle = 0$) を満たせば次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i T |T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T |T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\ (3.4) \quad & + B(|T^*|^{(\delta+s)\beta} y_1, |T^*|^{(\delta+s)\beta} y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \||T|^{(\delta+r)\alpha} x_i\| \right)^2 \\ & \leq B(|T^*|^{(\delta+s)\beta} y_1, |T^*|^{(\delta+s)\beta} y_2) \left\langle (|T|^r A^{2p} |T|^r)^{\frac{(\delta+r)\alpha}{p+r}} \sum_i x_i, \sum_i x_i \right\rangle. \end{aligned}$$

但し、 $p \geq \delta$ 、かつ、任意の $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-(\delta+r)\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2(\delta+r)\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。

証明. 系 2.2 より

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i T |T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1} x_i, y_1 \right\rangle \left\langle \sum_i T |T|^{(\delta+r)\alpha+(\delta+s)\beta-1} x_i, y_2 \right\rangle \right| \\ & + B(|T^*|^{(\delta+s)\beta} y_1, |T^*|^{(\delta+s)\beta} y_2) \left(\sum_j \frac{r_j^2}{c_j} \right) \left(\sum_i \||T|^{(\delta+r)\alpha} x_i\| \right)^2 \\ & \leq B(|T^*|^{(\delta+s)\beta} y_1, |T^*|^{(\delta+s)\beta} y_2) \left\langle |T|^{2(\delta+r)\alpha} \sum_i x_i, \sum_i x_i \right\rangle. \end{aligned}$$

が成り立つ。但し、 $j = 1, \dots, m$ に対して $c_j = \sum_h |\langle |T^*|^{2(1-(\delta+r)\alpha)} z_h, z_j \rangle|$ (resp. $c_j = \sum_h |\langle |T|^{2(\delta+r)\alpha} z_h, z_j \rangle|$) とする。ここで、[6] における不等式

$$|T|^{2(\delta+r)\alpha} \leq (|T|^r A^{2p} |T|^r)^{\frac{(\delta+r)\alpha}{p+r}}$$

を用いることにより、不等式 (3.4) が導かれる。 $\square$

REFERENCES

- [1] M.L. Buzano, *Generalizzazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Politech. Torino **31** (1971-73). (1974), 405-409.
- [2] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17**(1966), 88-97.
- [3] M. Fujii, *Furuta's inequality and its mean theoretic approach*, J. Operator theory **23**(1990), 67-72.
- [4] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, *Furuta's inequality and its application to Ando's theorem*, Linear Alg. and its Appl. **179**(1993), 161-169.
- [5] M. Fujii, J.-F. Jiang and E. Kamei, *Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**(1997), 3655-3658.
- [6] M. Fujii, J.-F. Jiang, E. Kamei and K. Tanahashi, *A characterization of chaotic order and a problem*, J. Inequal. Appl. **2**(1998), 149-156.
- [7] M. Fujii and E. Kamei, *Furuta's inequality and a generalization of Ando's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **115**(1992), 409-413.
- [8] M. Fujii, A. Matsumoto and M. Tominaga, *Simultaneous extensions of Selberg and Buzano inequalities*, Nihonkai Math. J. **25**(2014), 45-63.
- [9] M. Fujii and R. Nakamoto, *Simultaneous extensions of Selberg inequality and Heinz-Kato-Furuta inequality*, Nihonkai Math. J. **9**(1998), 219-225.
- [10] M. Fujii and R. Nakamoto, *Extensions of Heinz-Kato-Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**(2000), 223-228.
- [11] M. Fujii and R. Nakamoto, *Extensions of Heinz-Kato-Furuta inequality, II*, J. Inequal. Appl. **3**(1999), 293-302.
- [12] M. Fujii and H. Yamada, *Around the Bessel inequality*, Math. Japon. **37**(1992), 979-983.
- [13] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc. **101**(1987), 85-88.
- [14] T. Furuta, *An elementary proof of an order preserving inequality*, Proc. Japan Acad. **65**(1989), 126.
- [15] T. Furuta, *An extension of the Heinz-Kato theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**(1994), 785-787.
- [16] T. Furuta, *Determinant type generalizations of the Heinz-Kato theorem via the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**(1994), 223-231.
- [17] E. Kamei, *A satellite to Furuta's inequality*, Math. Japon. **33**(1988), 883-886.
- [18] K. Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**(1996), 141-146.
- [19] M. Uchiyama, *Some exponential operator inequalities*, Math. Inequal. Appl. **2**(1999), 469-471.
- [20] H. S. Wilf, *Some applications of the inequality of arithmetic and geometric means to polynomial equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **14**(1963), 263-265.