

二状態雑音の非線型系に対する影響

東大 理

北原 和夫^(*)

稲葉 豊

^(*) 現在は、
静岡大学 教養

不安定現象を示す非線型系が外部パラメータの揺ぎによってどのように影響されるかについて、揺ぎが白色雑音でガウス過程の場合には、伊藤或いは Stratonovich の方法で、Fokker-Planck 方程式と導き、定常状態の確率分布を求めることができる。雑音の振幅を上げてゆくと、確率分布の形が急に変わり、一種の相転移現象が起こることが知られている。⁽¹⁾

揺ぎが白色雑音でない場合、即ち、揺ぎがある有限な相関時間 τ_c を持っている場合、一般的な定常分布を求めることは困難であるが、揺ぎが二状態雑音の場合は、揺ぎの任意の振幅及び任意の相関時間に対して、定常分布を解析することができる。⁽²⁾

先ず、次の様な非線型微分方程式を考えよう、

$$\dot{x}(t) = F(\alpha(t), x(t)). \quad (1)$$

ここで, $F(\alpha, x)$ は α と x の任意の関数で, $\alpha(t)$ は揺れている外部パラメータである。 $\alpha(t)$ は,

$$\alpha(t) = a \text{ or } b \quad (2)$$

の二つの値のみをとるものとし, 値 a, b ととる確率 $P_a(t), P_b(t)$ は, 次のような Markov 過程に従うものとする,

$$\begin{cases} \dot{P}_a(t) = -\frac{\gamma}{2} [P_a(t) - P_b(t)] \\ \dot{P}_b(t) = -\frac{\gamma}{2} [P_b(t) - P_a(t)] \end{cases} \quad (3)$$

この時, 時刻 t に, $x(t) = x$, $\alpha(t) = a$ or b とする確率 $P_a(x, t), P_b(x, t)$ は,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_a(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F(a, x) P_a(x, t) - \frac{\gamma}{2} [P_a(x, t) - P_b(x, t)] \\ \frac{\partial}{\partial t} P_b(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} F(b, x) P_b(x, t) - \frac{\gamma}{2} [P_b(x, t) - P_a(x, t)] \end{cases} \quad (4)$$

を満たす。定義から明らかなように, 時刻 t に $x(t) = x$ とする確率 $P(x, t)$ は

$$P(x, t) = P_a(x, t) + P_b(x, t) \quad (5)$$

より求められる。式 (4) は $P(x, t)$ と,

$$Q(x, t) \equiv P_a(x, t) - P_b(x, t) \quad (6)$$

に於ける方程式の形に書換えることができる。そして, 自然な境界条件

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} Q(x, t) = 0 \quad (7)$$

と仮定すれば, $P(x, t)$ について関いた方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x) P(x, t) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) \int_{-\infty}^t dt' e^{-[\gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x)](t-t')} \\ & \times \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P(x, t') \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。ここで,

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \{ F(a, x) + F(b, x) \} \quad (9)$$

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2} \{ F(a, x) - F(b, x) \}. \quad (10)$$

式(8)に定常分布 $P(x, t) = P_{st}(x)$ を代入すると,

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x) P_{st}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) \frac{1}{\gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x)} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P_{st}(x) \quad (11)$$

が得られる。 x の大きいところで $P_{st}(x)$ 及びその微分が 0 になることと仮定すれば, $\frac{\partial}{\partial x}$ を落としてとができ,

$$\tilde{f}(x) P_{st}(x) = \tilde{g}(x) \frac{1}{\gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x)} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P_{st}(x) \quad (12)$$

となり, これは $P_{st}(x)$ に対する 1 階の常微分方程式

$$\left[\gamma + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{f}(x) \right] \left(\tilde{f}(x) / \tilde{g}(x) \right) \cdot P_{st}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{g}(x) P_{st}(x) \quad (13)$$

になる。この解は簡単に求められ,

$$P_{st}(x) = \mathcal{N} \frac{\tilde{g}(x)}{[\tilde{g}(x)]^2 - [\tilde{f}(x)]^2} \times \exp \left[\gamma \int^x dx' \frac{\tilde{f}(x')}{[\tilde{g}(x')]^2 - [\tilde{f}(x')]^2} \right] \quad (14)$$

となる。もっと便利な公式は、

$$P_{st}(x) = \mathcal{N} \left\{ \frac{1}{F(a, x)} - \frac{1}{F(b, x)} \right\} \times \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \int^x dx' \left\{ \frac{1}{F(a, x')} + \frac{1}{F(b, x')} \right\} \right] \quad (15)$$

である。上の公式から明らかなように、 $F(a, x) = 0$ 或いは $F(b, x) = 0$ となる点は、 $P_{st}(x)$ の特異点になっている。

それぞれを x_a, x_b と置く。即ち、 $F(a, x_a) = 0$, $F(b, x_b) = 0$ 。定常分布 $P_{st}(x)$ は、 $x = x_\alpha$ ($\alpha = a, b$) で次のように振舞う；

(i) $\frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) \right]^{-1} + 1 > 0$ の時、無限大に発散する。

(ii) $-1 < \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) \right]^{-1} + 1 < 0$ の時、 $P_{st}(x_\alpha)$ は 0 になるが、傾きは無限大である。

(iii) $\frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) \right]^{-1} + 1 < -1$ の時、 $P_{st}(x_\alpha) = 0$ で、傾きも 0 となる。

x_α ($\alpha = a, b$) が安定な定常状態ならば、 $\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha, x_\alpha) < 0$

であるから、上記の (i) ~ (iii) は、 γ の増大に対して (つまり相関時間の減少に対して)、安定定常状態の確率が減少することを意味する。

公式 (15) より、定常分布 $P_{st}(x)$ の極値は、

$$\gamma = \frac{2}{[F(a, x)]^2 - [F(b, x)]^2} \times \left\{ -[F(a, x)]^2 \frac{\partial F}{\partial x}(b, x) + [F(b, x)]^2 \frac{\partial F}{\partial x}(a, x) \right\} \quad (16)$$

と解くことにより得られる。

以下応用例を挙げる。

(I) Verhulst の人口模型 ⁽³⁾ 増殖率 $\alpha(t)$ が揺れている人口模型

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) - [x(t)]^2 \quad (17)$$

を考える。

$$\alpha(t) = \lambda + I(t), \quad (18)$$

$$I(t) = \Delta \text{ or } -\Delta \quad (19)$$

とし、揺ぎの相関関数を

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|} \quad (20)$$

とする。公式 (14) 或いは (15) を用いると、 x の定常分布は、

$$P_{st}(x) = N x^{\frac{\gamma\lambda}{\Delta^2 - \lambda^2} - 1} |x + \Delta - \lambda|^{-\frac{\gamma}{2(\Delta - \lambda)} - 1} \\ \times |x - \Delta - \lambda|^{\frac{\gamma}{2(\Delta + \lambda)} - 1} \quad (21)$$

[$\lambda - \Delta \leq x \leq \lambda + \Delta$ に対して]

$$P_{st}(x) = 0 \quad [x < \lambda - \Delta \text{ 及び } x > \lambda + \Delta] .$$

この確率分布は、 Δ と γ の値によつて定性的に全く異なる振舞をする。[図1を参照]

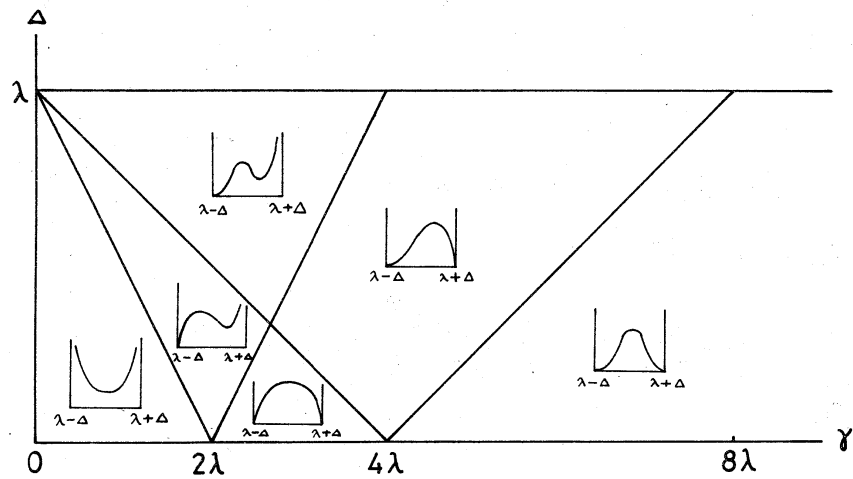


図1. 揺いでいる Verhulst 模型に対する
定常確率分布 $P_{st}(x)$ の形

(Ⅱ) がん細胞増殖の模型⁽⁴⁾ Lefever と Garay によつて
提唱された増殖の模型は、

$$\dot{x} = \alpha + (1 - \theta x)x - \beta x / (1 + x). \quad (22)$$

β はがん細胞の増殖能力を抑制する細胞の濃度を表わす。

この外部パラメータを二準位雑音としよう。即ち、

$$\beta(t) = \beta_0 + I(t) \quad (23)$$

とし $I(t)$ の相関関数は式(20)の如く与えられるものとする。

この系の定常分布は図2のようになる。

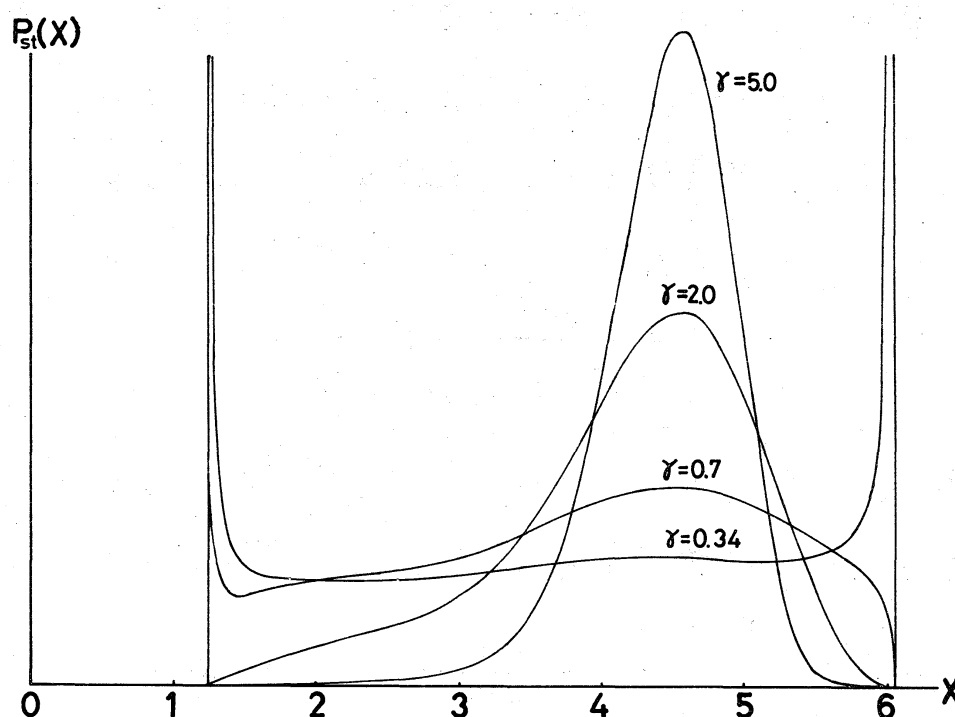


図2. 揺いでいる Lefever - Garay 模型;

$$\dot{x} = \alpha + (1 - \theta x)x - [\beta_0 + I(t)]x/(1+x).$$

$$\langle I(t)I(t') \rangle = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|} \quad \alpha = 2.4,$$

$$\beta = 5.95, \quad \Delta = 0.35.$$

(Ⅲ) 光を照射した化学反応⁽⁵⁾ Nitzan と Ross によって提唱された模型は次の二つの方程式からなる。

$$\begin{cases} \dot{A} = -(k_1 + k_2)A + k_2 a \\ \dot{T} = \alpha A - \beta(T - T_e) + \lambda \dot{A} \end{cases} \quad (24)$$

最初の式は、光を吸収する化学物質 A の濃度に対するものであり、二番目は、温度の時間変化を表わし、光の吸収による熱の発生項 αA 、外界 (温度 T_e) への熱の放出項 $-\beta(T - T_e)$ 、及び化学反応による熱の発生 (吸収) 項 $\lambda \dot{A}$ からなる。温度変化よりも化学反応の方が急速に進行するとすれば、 $\dot{A} \approx 0$ とおくことができて、

$$\dot{T} = \frac{\alpha a}{\frac{k_1}{k_2} + 1} - \beta(T - T_e) \quad (25)$$

と得る。ただし、 $k_1/k_2 = \kappa e^{\Delta R/T}$ であるから、式(25)は T について非線型である。適当に変数をスケールすると

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{\kappa e^{\Delta r/x} + 1} - (x - x_e) \quad (26)$$

という形になる。光を照射している時は $\alpha \neq 0$ 、照射していない時は $\alpha = 0$ である。今、 $\alpha(t) = 1$ or 0 という二準位雑音と考え、その影響を調べてみると図3のような温度の確率分布が得られる。

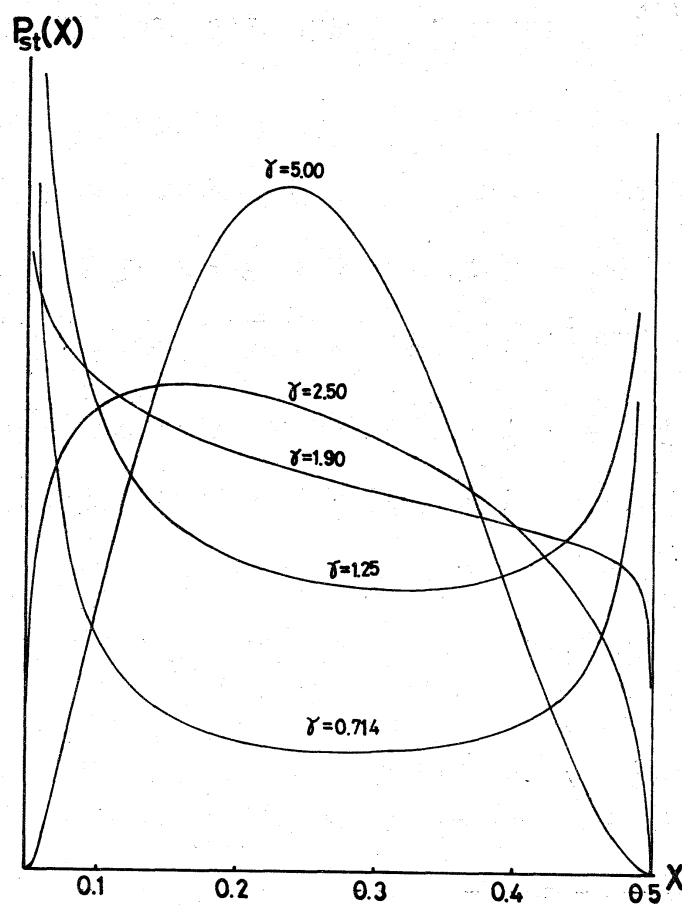


図3. 乱雑に光照射した化学反応の模型

$$\dot{x} = \alpha(t) / [x e^{\Delta r/x} + 1] - (x - x_e)$$

に対する定常確率分布。 $\alpha(t) = 1$ or 0 で

相関時間は γ^{-1} 。 $x = 1.0$, $\Delta r = 0.1$,

$x_e = 0.05$ 。

以上、3つの例から判るように、揺ぎの振幅 Δ^2 を一定にしても、相関時間を変えることにより、全く定性的に異な

る定常確率分布を得る。一種の相転移とみなすこともできようが、系の変数 $x(t)$ について、 $\langle x(t)x(t') \rangle$ などにどのような異常が出るか、などについて未だ不明である。

一変数の系に対する揺動が二準位雑音の場合、白色でない効果と調べることができた訳であるが、これとそのまま、多準位雑音に拡張すること（詳細釣り合いの成立しない雑音も含める！）、及び、多変数で記述される系（振動系、混沌系）へ拡張することは不可能である。

引用文献

- (1) L. Arnold, W. Horsthemke and R. Lefever, Z. Physik B29 367 (1978).
- (2) K. Kitahara, W. Horsthemke and R. Lefever, Phys. Lett. to appear (1979).
- (3) 例えば, F. Schlögl, Z. Physik 253 147 (1972).
- (4) R.P. Garay and R. Lefever, J. Theor. Biol. 73 417 (1978).
- (5) A. Nitzan and J. Ross, J. Chem. Phys. 59 241 (1973).