

Koebe の定理について

京大教養 藤家 龍雄

定理 (Koebe) $f(z)$ は単位円 $D: |z| < 1$ で正則かつ有界とし, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ を D 内の弧の列で, 単位円周上の弧 γ に収束するものとする. もし

$$M_n = \max_{\gamma_n} |f(z) - \alpha| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

なる定数 α が存在するならば, $f(z) \equiv \alpha$ である.

定理における $\{\gamma_n\}$ を Koebe arc 列, γ を Koebe

arc, そして α を Koebe value と呼ぶ.

上記 Koebe の定理については, ¹ 関数の一般化の立場から Bagernihl-Seidel [1] により, 関数 $f(z)$ が正規有理型関数のときにも成立つことが示され, MacLane によって, 円周上至るときは稠密な集合の各点で漸近値をもつ正則関数, さらに Barzth によって, 同じ性質をもち, Nevanlinna の伯数関数について $N(r, \infty, f) = O(1)$ なる有理型関数について定理の成立が証明されている [2], [6].

領域の一般化, つまり一般的な平面領域あるいはリーマン面

上の函数についての Koebe の定理は決して、方法上の制約もあり、限られた場合を除いて十分な結果が得られていないように思われる。

さらに Koebe values の集合については, Collingwood-Cartwright [3] 等の研究があり, 有理型函数の集積値集合の中で, range of values, 漸近値集合との関係について論じられている。

本講義においては, 領域は単位円に限るが, 単位円の円周は Martin コンパクト化と同相であるという事実に基いて, なるべくリーマン面上でも通用する方法を用いて上記3つの問題系から Koebe の定理を考察する。したがって, それらの方法のみによって得られる結果はそのまゝリーマン面上の結果である。

1. Fine limit points set

S を D 内の閉集合とする。Gamelin [5] によって S の almost radial limit points set をつぎのように定義する。先ず, 2つの実数 ψ, b に対して $T(e^{i\theta}, \psi, b)$ は点 $e^{i\theta}$ に頂点と有し, 頂角が ψ , 線分 $(1-b)e^{i\theta}, e^{i\theta}$ を高さとする = 等辺三角形とし,

$$E_S = \{e^{i\theta}; T(e^{i\theta}, \psi, b) \cap S \neq \emptyset \text{ for } \forall \psi, \forall b\}$$

と置く。

一方 D の開集合 G に対して, $D - G$ が $e^{i\theta}$ で thin である
 とす $G \in \mathcal{G}_{e^{i\theta}}$ とし, S の fine limit points set F_S と

$$F_S = \{e^{i\theta}; G \cap S \neq \emptyset \text{ for } \forall G \in \mathcal{G}_{e^{i\theta}}\}$$

 と定義する。

$\Sigma(d\theta)$ を円周上の $L^\infty(d\theta)$ の maximal ideal space,
 $\hat{\chi}_{E_S} \in \chi_{E_S}$ の Gelfand transform とし,

$$\tilde{E}_S = \{x \in \Sigma(d\theta); \hat{\chi}_{E_S}(x) = 1\}$$

とすると Gamelin より

$$\bar{S} \cap \Sigma(d\theta) = \tilde{E}_S$$

ただし, $\bar{S}$ は $H^\infty(D)$ の maximal ideal space $\mathcal{M}_D$ に
 おける S の closure である。

Constantinescu-Cornea [] よりいふ, 円周上
 測度 0 を除いて $F_S \subset E_S$ であるから $\tilde{F}_S \subset \tilde{E}_S$ であり

$$F_S: \text{測度正} \implies \tilde{F}_S \neq \emptyset \text{ かつ } \tilde{F}_S \subset \bar{S} \cap \Sigma(d\theta)$$

$$\implies \exists x \in \tilde{F}_S \text{ s.t. } U(x) \cap S \neq \emptyset \text{ for } \forall \text{ nbhd } U(x)$$

である。そこで $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $F_\alpha = \bigcap_n F_n$ とおく。

これに $F_n = F_{f^{-1}(\bar{v}_n)}$, $v_n = v_n(\alpha)$ は α の $\frac{1}{n}$ -近傍であ
 る。もし, 与えられた n に対して, F_n が正の測度をもてば

$$\bigcap_n (\overline{f^{-1}(\bar{v}_n)} \cap \Sigma(d\theta)) \neq \emptyset \text{ であるから,}$$

$x \in \bigcap_n (\overline{f^{-1}(\bar{v}_n)} \cap \Sigma(d\theta))$ とすれば, 与えられた n に対
 し $x \in \Sigma(d\theta)$ かつ $x \in \overline{f^{-1}(\bar{v}_n)}$ であるから, 与えられた n

と x のすべての近傍 $U(x)$ に対して $U(x) \cap f^{-1}(V_n) \neq \emptyset$,
 しながつて, $\alpha \in C(f, x)$ (f の x における集積値集合).
 $\Sigma(d\theta)$ は $\mathcal{M}_D$ の Šilov 境界と同一視することからできるから,
 α は Šilov 境界点における集積値と考えてよい.

上で定義した F_α についてつぎのことを云える. 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して, 測度 0 の集合を除いて $F_\alpha = F_\beta$ であり, 何故ならば, もし $F_\beta - F_\alpha$ が測度正ならば, 十分大なる n に対し $F_\beta - F_n$ は測度正である. 一方単位円周上 $\partial D - F_n$ のほとんどすべての点は $G \in \mathcal{G}_\gamma$ が存在して $G \cap f^{-1}(V_n) = \emptyset$ であるから $\partial D - F_n$ のほとんどすべての点は Fatou point であり, $F_\beta - F_n$ 上ほとんど到ると β の Fatou limit は β に等しい. 故に $f \equiv \text{const.} = \beta$ である.

f の $\gamma \in \partial D$ における cluster value または global cluster value α に関して, つぎの定理を得る.

定理 $\alpha \in C(f, \gamma)$ (または $C(f)$) に対して F_α が測度正ならば, $f \equiv \text{const.}$ であるか $\mathbb{C} - R(f, \gamma)$ ($\mathbb{C} - R(f)$) は容量 0 である. こゝに $R(f, \gamma)$, $R(f)$ は γ における (global な) range of values である.

証明 $R(f, \gamma) = \bigcap_n f(U_n)$. ただし $U_n = U_n(\gamma)$ は γ の $\frac{1}{n}$ -近傍である. $\mathbb{C} - R(f, \gamma) = \bigcup_n f(U_n)^c$ が容量正で

あるならば, ある n に対して $f(\Pi_n)^c$ は容量正であるから,
 f は Π_n の各成分 Π_n^i で Fatou 写像である. いま, 開集合 G
 に対して $\Delta_1(G) = \{z \in \partial D; G \in \mathcal{G}_z\}$ とおけば, $\Delta_1(\Pi_n)$
 $= \bigcup_i \Delta_1(\Pi_n^i)$ であり, $\Delta_1(\Pi_n)$ は測度正であるから, ある
 i に対して $\Delta_1(\Pi_n^i) \cap F_\alpha$ の測度は正となる. これより
 Lusin-Privalov 型の定理 [4] により $f \equiv \text{const.} = \alpha$ と
 なる.

以上述べた結果は一般の Riemann 面の上でも成立つ. そ
 の際, 単位円周 ∂D を Riemann 面 R の Martin 境界 Δ ,
 ∂D 上のルベーク測度 $d\theta$ と Δ 上の調和測度で, Sierlov
 境界 $\Sigma(d\theta)$ と R の Wiener コンパクト化における調和境
 界で置きかえる.

上記定理は Koebe の定理の一般化とみてよいが, 上の注
 意によつてリーマン面上でも成立つ. つぎに函数 f の条件を
 つけることによつて, F_α の測度が正で $f \equiv \text{定数}$ となる場合
 を考察する.

2. $\text{meas. } F_\alpha > 0$ で $f \equiv \text{const.}$ となるための条件.

$\{\gamma_n\}$ を Koebe value α に対する Koebe arc 列とし
 $S = \bigcup_n \gamma_n$, $\gamma = \lim_n \gamma_n$ とおく. α の近傍 V として
 $G = f^{-1}(V)$ とおけば

ある V に対して, $F_S \cap \Delta_1(G)$ の測度正ならば $f \equiv \alpha$ であるから, 任意の V に対して $F_S \cap \Delta_1(G)$ の測度 0 の場合を考える. n が十分大なとき, γ_n は G の 1 つの連結成分 G_i に含まれる. したがって $F_S \cap \Delta_1(G)$ の測度 0 とすれば,

$$\forall \gamma \in F_S \text{ と } \forall \pi \in \mathcal{O}_\gamma \text{ に対して,}$$

$$\pi \cap \gamma_n \neq \emptyset \quad \text{かつ}$$

$$\pi \cap \partial G \neq \emptyset, \quad \text{したがって } T(\gamma, \psi, b) \cap \partial G \neq \emptyset.$$

そこで MacLane-Barth [2, 6] によって, D の有理型関数のクラス $\mathcal{L}$ をつぎのように導入する.

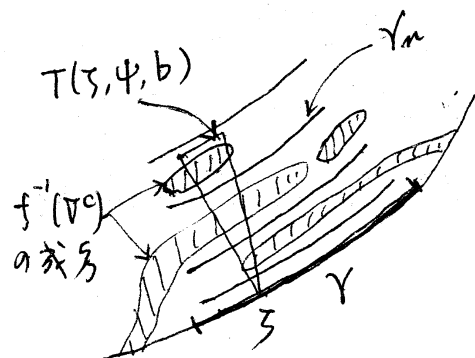
f を D の有理型関数とし, $L(\lambda) = \{z; |f(z)| = \lambda\}$ と f の level set for λ と呼ぶ. $L(\lambda)$ が ∂D 上 真に終る とは, $L_\gamma^i(\lambda)$ と $L_\gamma(\lambda) = L(\lambda) \cap (\gamma < |z| < 1)$ の連結成分, $\delta_\gamma^i(\lambda)$ と $L_\gamma^i(\lambda)$ の直径としなとき, $\sup \delta_\gamma^i(\lambda) \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow 1$) なるときという.

定理 ([2] 参照) $f \in \mathcal{L}$ に対して 0 の Koebe value ならば, $f \equiv 0$ または $\mathbb{C} - \{0\} \subset R(f, \gamma)$. ただし, γ は Koebe arc の任意の内部点とする.

証明 $V = V(0)$ によって $f^{-1}(V^c)$ の成分を考えよと,

- (a). non-compact なものについては, $f \in \mathcal{L}$ より, γ の近傍で, γ 上への射影が $\delta > 0$ 以上の長さをもつものは有限個,
 (b) compact なものは f の極を含み, γ の近傍に無数に

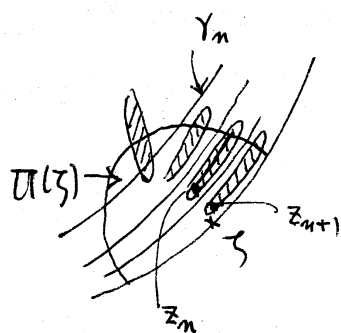
存在する。さもなくば、 $\Delta_1(G) \cap E_S$ は測度正となり、 f は定数となる。



さらに、 γ の内部 $(\gamma)^i$ の任意の点の近傍 $U(z)$ は常に上記 compact components を無限回含む。

先ず、無限回と交わることを言う。有限回しか交わら

ないならば、十分小さい $U(z)$ で考えれば、 $\Delta_1(G) \cap E_S$ は測度正となり、 $f \equiv \text{定数}$ となって矛盾。故に無限回と交わる。



これより $U(z)$ に含まれるとすれば、各成分中に点 z_n をとり、点列 $\{z_n\}$ が z に収束するようにできる。また、 z_n の属する成分と $U(z)$ との交わりには点 z'_n をとると、 z_n と z'_n とで結ぶ弧で成分中に含まれるもの

C_n をとることができる。弧列 $\{C_n\}$ の存在は $f \in \mathcal{D}$ に及ぶ。故に $U(z)$ と交わる compact component は有限回を除いて $U(z)$ に含まれる。

これは $\forall z \in (\gamma)^i$ に対して、 $\forall \epsilon \in R(f, z)$ を示す。 $\forall$ は任意だから $\bar{\epsilon} - \{0\} \subset R(f, z)$ である。

f が正則なときは, $f \in \mathcal{A}$ と, ∂D 上稠密な集合の各点で f が漸近値をもつことと同値である ([6]) から, $f \in \mathcal{A}$ と $f - \alpha \in \mathcal{A}$ とは同値である. よってつぎの系を得る.

系 ([6]) クラス $\mathcal{A}$ の正則関数は有限な Koebe value を持たない.

3. 有理型関数の集積値

f と D における有理型関数とし, $C(f, \zeta)$ を f の $\zeta \in \partial D$ における (full) cluster set とする. $C(f, \zeta)$ をつぎのように分解することができる.

$$S_1 = \{\alpha \in C(f, \zeta); \forall U(\zeta) \exists V(\alpha) \Rightarrow f^{-1}(V) \text{ の或る } G \subset U\}$$

$$S_2 = C(f, \zeta) - S_1 = \{\alpha \in C(f, \zeta); \exists U_0(\zeta) \Rightarrow \forall V(\alpha) \forall f^{-1}(V) \text{ の或る } G \not\subset U_0\}$$

S_1 をさらにつぎのように分解する.

$$S'_1 = \{\alpha \in S_1; S_1 \text{ の定義における } G \text{ はすべてクラス } SO_{HB}\}$$

$$S''_1 = \{\alpha \in S_1; S_1 \text{ の定義における } G \text{ で } \not\subset SO_{HB} \text{ なるものが存在する}\}.$$

このとき, S'_1 は容量 0 の集合を除いて range of values $R(f, \zeta)$ に含まれ, 除外集合は漸近値である. また $\alpha \in S''_1$ の任意の近傍域には, ζ の近傍における f の fine limits の集合が常に容量正だけ含まれる. これは α が f の fine

boundary function f^* の essential closed range $C^*(f, \zeta)$ に含まれることとを意味し, 第1で述べた事実により, $S_1'' \subset C^*(f, \zeta) \subset C(f, \check{S}_\zeta)$ である, したがって $\check{S}_\zeta$ は ζ 上の fibre に含まれる $\check{S}$ -border 境界の部分である.

$\alpha \in S_2$ に対しては, $z_n \in f^{-1}(V_n)$, $z_n \rightarrow \zeta$ かつ $f(z_n) \rightarrow \alpha$ なる数列が存在し, z_n と ∂D_0 とを結ぶ弧 $\gamma_n \subset f^{-1}(V_n)$ にとることから, $f(z)|_{\gamma_n} \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) であるから γ_n は ∂D 上の弧 γ に収束する. すなわち α は Koebe value である. リーマン面では, γ は Martin 境界上測度測度の連続体に退化する可能性がある. 以上をまとめると,

定理 $C_B^*(f, \zeta)$ と ζ における essential fine boundary cluster set とあると, Capacity 0 の集合を除いて

$$C(f, \zeta) - C_B^*(f, \zeta) \subset R(f, \zeta).$$

さらに

$$C(f, \zeta) - C_B^*(f, \zeta) = R(f, \zeta) \cup X(f, \zeta),$$

ここで $X(f, \zeta)$ は ζ の近傍に漸近道をもつ漸近値の集合である.

参考文献

- [1] Bagemihl, F. and Seidel, W.; Koebe arcs and Fatou points of normal functions, Comm. Math. Helv. 39 (1961).
- [2] Barth, K.F.; Asymptotic values of meromorphic functions. The Michigan Math. J. 13 (1966)
- [3] Collingwood, E.F.; and Cartwright, M.I.; Boundary theorems for functions meromorphic in the unit circle. Acta Math. 87 (1952).
- [4] Constantinescu, C. und Cornea, A.; Ideale Rander Riemannscher Flächen. Springer (1963).
- [5] Gamelin, T.W.; Lectures on $H(D)$. Univ. Nac. De La Plata. (1972).
- [6] MacLane, G.R.; Asymptotic values of holomorphic functions. Rice Univ. Studies 49 (1963).